سوالات ریاضیات مقدماتی

۱. مقدار $\log_{۵}^{۶۲۶}$ بین کدام دو مقدار قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۴}<A<\frac{۱}{۵}$ ۲) $۵<A<۶$ ۳) $۴<A<۵$ ۴) $-۵<A<-۴$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

راه اول:

$$A=\log_{۵}۶۲۶,۶۲۶=۶۲۵+۱=۵^{۴}+۱\Rightarrow ۵^{۴}<۶۲۶<۵^{۵}$$

$$\Rightarrow \log_{۵}۵^{۴}<\log_{۵}۶۲۶<\log_{۵}۵^{۵} \Rightarrow ۴\log_{۵}۵<A<۵\log_{۵}۵ \Rightarrow ۴<A<۵$$

راه دوم:

$$A=\log_{۵}۶۲۶\Rightarrow ۵^{A}=۶۲۶\ ,\ ۵^{۴}<۶۲۶<۵^{۵}\Rightarrow ۵^{۴}<۵^{A}<۵^{۵}\Rightarrow ۴<A<۵$$

۲. به عدد ۳۰۱ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸ برابر ۳ گردد؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۱۲ ۳) ۲۱۱ ۴) ۳۰۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\log_{۸}(x+۳۰۱)=۳\Rightarrow x+۳۰۱=۸^{۳}=۵۱۲\Rightarrow x=۵۱۲-۳۰۱=۲۱۱$$

۳. معادله $۹^{x}+۳^{x}-۲=۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$۳^{x}=a>۰\Rightarrow ۹^{x}=\left(۳^{۲}\right)^{x}=\left(۳^{x}\right)^{۲}=a^{۲}\Rightarrow a^{۲}=a-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\Rightarrow ۳^{x}=۱\Rightarrow x=۰\\ a=-۲ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۴. اگر $\log ۲=m$ و $\log ۳=n$ آنگاه $\log ۳۷۵$ کدام است؟

۱) $m-n-۳$ ۲) $m+n-۲$ ۳) $۳m-n+۳$ ۴) $۳+n-۳m$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :

$$\log ۳۷۵=\log ۱۲۵\times ۳=\log ۵^{۳}\times ۳=۳\log ۵+\log ۳=۳(۱-\log ۲)+\log ۳=۳(۱-m)+n$$

۱. اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد در عدد $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰}$ چند صفر متوالی بعد از ممیز وجود دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰} = A \Rightarrow \log\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰} = \log A \Rightarrow ۶۰\log\frac{۱}{۲} = \log A \Rightarrow -۶۰\log ۲ = \log A$$

$$\log A = -۶۰(۰/۳۰۱) = -۱۸/۰۶ \rightarrow A = ۱۰^{-۱۸/۰۶}$$

$$۱۰^{-۱۹} < ۱۰^{-۱۸/۰۶} < ۱۰^{-۱۸}$$

لذا تعداد صفرهای بعد از ممیز ۱۸ تاست.

۲. اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع $f(x) = \log\left(ax + \sqrt{۹x^۲ + ۱}\right)$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ و ۳- ۳) ۳- و ۳ ۴) ۱ و ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$f(x) = \log\left(ax + \sqrt{۹x^۲ + ۱}\right)$$

چون مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع است، لذا تابع باید فرد باشد. یعنی باید شرط $f(x) + f(-x) = ۰$ برقرار باشد.

$$f(-x) = \log\left(-ax + \sqrt{۹x^۲ + ۱}\right)$$

$$f(x) + f(-x) = \log\left(ax + \sqrt{۹x^۲ + ۱}\right) + \log\left(-ax + \sqrt{۹x^۲ + ۱}\right)$$

$$= \log\left(\sqrt{۹x^۲ + ۱} + ax\right)\left(\sqrt{۹x^۲ + ۱} - ax\right) = \log\left(۹x^۲ + ۱ - a^۲x^۲\right) = ۰ = \log ۱$$

$$\Rightarrow ۹x^۲ + ۱ - a^۲x^۲ = ۱ \Rightarrow ۹x^۲ = a^۲x^۲ \Rightarrow ۹ = a^۲ \Rightarrow a = \pm ۳$$

۳. کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y = x^۲ + ۱$ ۲) $y^۳ = x^۲ + ۱$ ۳) $y^۳ = x^۳ + ۱$ ۴) $y = \sin x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : تابع گزینه‌ی (۱) زوج و لذا یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۲) نیز زوج است و یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۴) پیوسته و متناوب است، لذا یک به یک نیست.

۴. کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y=x^{۳}+۱$ ۲) $y=x^{۳}-x$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ -۲x & x<۱ \end{cases}$ ۴) $y=x^{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : تابع گزینه‌ی (۱) تابعی است اکیداً صعودی و لذا یک به یک است. (شکل (۱))

تابع گزینه‌ی (۲) تابعی است غیر یک به یک، زیرا $f(۱)=f(-۱)=۰$ ، این تابع غیر یکنواست. (شکل (۲))

تابع گزینه‌ی (۳) با استفاده از آزمون خط موازی محور xها غیر یک به یک است.

نکته : در تابع دو ضابطه‌ای اگر برد ضابطه‌ها با هم اشتراک داشته باشند تابع یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۴) غیر یک به یک است، زیرا $f(۱)=f(-۱)=۱$ ضمناً تابع زوج است. پس غیر یک به یک است.

نکته : تابع زوج روی دامنه خود تابعی است غیر یک به یک است، مگر آن که $f=\{(۰,a)\}$ باشد.

۵. وارون تابع $f:R\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۳$ کدام است؟

۱) $۲x+۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}x+۳$ ۳) $۲x-۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : $y=۲x+۳ \to y-۳=۲x \to x=\frac{y-۳}{۲} \to f^{-۱}=\frac{x-۳}{۲}$

۶. حاصل عبارت $۲\cos\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۴\cot\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}-۱$ ۲) $-\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$۲\cos\left(-\frac{۱۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۴\cot\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)=۲\cos\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)$$

$$=۲\cos\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)$$

$$=۲\cos\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)=۲\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+۳(۱)-۴(۱)=-\sqrt{۲}-۱$$

۷. اگر $x=\frac{۲}{\sin\alpha}$ و $y=۳\cot\alpha$ مقدار $۹x^{۲}$ کدام است؟

۱) $۴+۹y^{۲}$ ۲) $۹+۴y^{۲}$ ۳) $۳۶-۴y^{۲}$ ۴) $۳۶+۴y^{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : $۹x^{۲}=۹\left(\frac{۴}{\sin^{۲}\alpha}\right)=۳۶\left(\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\right)=۳۶\left(۱+\cot^{۲}\alpha\right)=۳۶\left(۱+\frac{y^{۲}}{۹}\right)=۳۶+۴y^{۲}$

۸. اگر $\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{۱+\tan^{۲}x}-\frac{۱}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{\cos x}$ ۳) $\frac{-۲}{\cos x}$ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\sqrt{۱+\tan^{۲}x}-\frac{۱}{\cos x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}-\frac{۱}{\cos x}=\left|\frac{۱}{\cos x}\right|-\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{\cos x}-\frac{۱}{\cos x}=۰$$

چون $\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi \rightarrow \cos x>۰$ (در ناحیه‌ی چهارم cosx مثبت است)

۹. حاصل $\frac{\sin ۳a\cos a}{\sin a}-\cos ۳a$ برابر کدام است؟

۱) $-\cos a$ ۲) $\cot ga$ ۳) $۲\sin a$ ۴) $۲\cos a$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\frac{\sin ۳a\cos a-\cos ۳a\sin a}{\sin a}=\frac{\sin(۳a-a)}{\sin a}=\frac{\sin ۲a}{\sin a}=\frac{۲\sin a\cos a}{\sin a}=۲\cos a$$

۱۰. خلاصه شده $\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin ۲\alpha$ ۲) $\sin ۲\alpha$ ۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$=(\cos\alpha)(-\sin\alpha)-(\sin\alpha)(\cos\alpha)=-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=-۲\sin\alpha\cos\alpha=-\sin ۲\alpha$$

۱۱. تابع معکوس تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۲$ کدام است؟

۱) $y=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$ ۲) $y=۱-\sqrt[۳]{x+۱}$ ۳) $y=-۱+\sqrt[۳]{x-۱}$ ۴) $y=-۱-\sqrt[۳]{x+۱}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۲\rightarrow y=(x+۱)^{۳}+۱\rightarrow y-۱=(x+۱)^{۳}\Rightarrow$$

$$x=-۱+\sqrt[۳]{y-۱}\rightarrow f^{-۱}(x)=-۱+\sqrt[۳]{x-۱}$$

۱۲. اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=x-۴$ مقدار $\frac{(fog)_{(۲)}}{(gof)_{(-۱)}}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=۲x+۳\ ,\ g(x)=x-۴ \Rightarrow g(۲)=۲-۴=-۲$$

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(-۲)=۲(-۲)+۳=-۴+۳=-۱$$

$$gof(-۱)=g(f(-۱))=g(-۲+۳)=g(۱)=۱-۴=-۳ \Rightarrow \frac{fog(۲)}{gof(-۱)}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳. حدود m برای آن که معادله درجه دوم $x^۲-x+m=۰$ دارای دو ریشه متمایز مثبت کدام است؟

۱) $m<\frac{۱}{۴}$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۴}$

۳) $m>۰$ ۴) $m>\frac{۱}{۴}$ یا $m<۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : برای آن که معادله‌ی درجه دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد، لازم است که $\Delta>۰$ و همچنین مجموع و حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله هر دو مثبت باشند.

۱۴. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $۲-\sqrt{۴-a}\ ,\ ۲+\sqrt{۴-a}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+a=۰$ ۲) $x^۲+ax-۴=۰$ ۳) $x^۲+۴x-a=۰$ ۴) $x^۲-ax+۴=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» :

$$\begin{cases} S=x_۱+x_۲=۴ \\ P=x_۱.x_۲=(۲+\sqrt{۴-a})(۲-\sqrt{۴-a})=a \Rightarrow x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۴x+a=۰ \end{cases}$$

۱۵. اگر x'',x' ریشه های معادله $x^۲-۲\sqrt{۳}x+۲=۰$ باشند، مقدار عبارت $x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'}$ برابراست با :

۱) $۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$ ۲) $۲\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ ۴) $۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :

$$A=x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'} \ \rightarrow\ A^۲=x'^۲x''+x''^۲x'+۲x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^۲=x'x''(x'+x'')+۲x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^۲=۲(۲\sqrt{۳})+۲(۲)\sqrt{۲}=۴(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}) \ \rightarrow\ A=۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

۱۶. در معادله درجه دوم، $x^2+2x-4=0$ حاصل $x_1^3-2x_2^2+4x_2$ کدام است؟ (x_1, x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم هستند.)

۱) ۱۶-　　۲) صفر　　۳) ۱۶　　۴) ۳۲-

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$x_1^2+2x_1-4=0 \rightarrow x_1^2+2x_1=4$$

پس : $\rightarrow x_1^3+2x_1^2=4x_1 \rightarrow x_1^3=4x_1-2x_1^2$ در x_1 ضرب

با جایگذاری در خواسته مسئله داریم:

$$x_1^2-2x_2^2+4x_2=\left(4x_1-2x_1^2\right)-2x_2^2+4x_2=-2\left(x_1^2+x_2^2\right)+4\left(x_1+x_2\right)$$

$$=-2\left(s^2-2p\right)+4(s)=-2\left((-2)^2+8\right)+4(-2)=-24-8=-32$$

۱۷. معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-5x+6=0$　　۲) $x^2+5x+\sqrt{6}=0$

۳) $x^2+5x+6=0$　　۴) $x^2+5x+4=0$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : S و P معادله جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$S_{\text{جدید}}=x'^2+x''^2=\left(x'+x''\right)^2-2x'x''=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}=5$$

$$P_{\text{جدید}}=x'^2.x''^2=\left(x'.x''\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2=6$$

$$x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-5x+6=0$$

۱۸. در مورد معادله‌ی $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)-6=0$ کدام گزینه درست است؟

۱)ریشه‌ی مضاعف دارد.　　۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد.　　۳) چهار ریشه دارد.　　۴) دو ریشه دارد.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : کافی است تغییر متغیر $\frac{x^2}{x^2+1}=y$ را انجام دهیم، داریم:

$$\Rightarrow y^2+y-6=0 \Rightarrow (y+3)(y-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1}=-3 & \text{غ‌ق‌ق} \\ \frac{x^2}{x^2+1}=2 \end{cases}$$

دقت کنید که $0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1$ ، بنابراین معادله‌ی موردنظر ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۱۹. در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^3+3y^2+3y+x^3+x=0$

۲) $y^2+2y=x-1$

۳) $|x|+|y-1|=1$

۴) $|y|\sqrt[3]{x}=1$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

در گزینه‌ی (۱) که به صورت $y^3+3y^2+3y+1+x^3+x-1=0$ است (۱ و ۱ـ اضافه شده است) با استفاده از اتحاد داریم.

$(y+1)^3=1-x-x^3 \Rightarrow y+1=\sqrt[3]{1-x-x^3} \Rightarrow y=-1+\sqrt[3]{1-x-x^3}$ تابع است

گزینه‌ی (۲) به صورت $(y+1)^2=x$ یا $y+1=\pm\sqrt{x}$ است که تابع نیست.

گزینه‌ی (۳) یک مربع است. مثلاً برای $x=0$ برای y دو جواب خواهید داشت. و برای گزینه‌ی (۴) هم با انتخاب $x=1$ دو جواب برای y دارید.

۲۰. رابطه $\{(x,y)|x^3+y^2-2y=0\}$ در مجموعه اعداد حقیقی داده شده است دامنه‌ی این رابطه برابر است با :

۱) $[1,\infty)$

۲) $(-\infty,1)$

۳) $(-\infty,1]$

۴) $(1,\infty)$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$x^3+y^2-2y=0 \Rightarrow (y-1)^2-1+x^3=0$

$\Rightarrow (y-1)^2=-x^3+1 \Rightarrow y-1=\pm\sqrt{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3\geq 0 \Rightarrow x^3\leq 1 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]$

۲۱. اگر $g(x)=1+\sqrt{x}$ ، $f(x)=x^2$ و $x>0$ آن گاه ضابطه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-1$

۲) $x+1$

۳) x^2-1

۴) x^2+1

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : پس ابتدا fog را تشکیل داده و سپس معکوس آن را محاسبه می‌کنیم.

$(fog)_{(x)}=1+\sqrt{x^2}=1+|x| \underset{=}{\overset{x>0}{=}} 1+x$

لذا معکوس $y=x+1$ برابر است با $x-1$ پس :

$g^{-1}of^{-1}=x-1$

۲۲. اگر $f(x)=۲x+۲a$ و $g(x)=x^۲+bx+c$ و $(fog)_{(x)}=۲x^۲+x+۱$ آنگاه $a+b+c$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۳-

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} f(x)=۲x+۲a \\ g(x)=x^۲+bx+c \\ (fog)(x)=۲x^۲+x+۱ \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=۲g(x)+۲a=۲(x^۲+bx+c)+۲a \Rightarrow$$

$$۲x^۲+۲bx+۲c+۲a=۲x^۲+x+۱$$

تساوی فوق باید برای تمام مقادیر x برقرار باشد، لذا باید ضریب $x^۲$ و ضریب x و اعداد ثابت در دو طرف تساوی یکسان باشند.

$$\begin{cases} ۲b=۱ & \text{ضریب } x \\ ۲c+۲a=۱ & \text{عدد ثابت} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow a+c=\frac{۱}{۲} \end{matrix} \Rightarrow a+c+b=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

۲۳. اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنه تعریف $(gof)_{(x)}$ کدام است؟

۱) $\left[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ ۴) $[-۱,۱)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=۴x^۲-۱ \Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq f(x)\leq ۱$$

$$-۱\leq ۴x^۲-۱\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq ۴x^۲\leq ۲ \Rightarrow x^۲\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq x\leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۴. تابع با کدام ضابطه فرد است؟

۱) $y=\frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}$ ۲) $y=\frac{۲^{۲x}-۱}{۲^x}$ ۳) $y=x\times ۲^x$ ۴) $y=x\log x$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : در گزینه‌ی (۴)، دامنه‌ی تابع $x>۰$ ، دامنه‌ی تابع غیر متقارن است پس نه فرد و نه زوج است. در گزینه‌های (۱) شرط لازم فرد بودن یعنی $f(۰)=۰$ برقرار نیست. در گزینه‌های (۲) و (۳) باید $f(۱)+f(-۱)=۰$ باشد که تنها در گزینه‌ی (۲) برقرار است.

۲۵. کدام تابع زیر با تابع $y=x+1$ برابر است؟

۱) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ ۲) $y=1+\sqrt{x^2}$ ۳) $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ ۴) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : دامنه‌ی تابع R است پس گزینه‌ی (۱) قابل قبول نیست زیر دامنه‌ی آن $R-\{1\}$ است. گزینه‌های (۲) و (۴) نیز با تابع $y=x+1$ برابر نیستند زیرا:

$(2): y=1+|x|$

$(4): y=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

در (۳) $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}=x+1 \ , \ x^2+1\neq 0$

۲۶. اگر f و h توابعی معکوس پذیر و $h(x)=-3f(2x)$ آنگاه $h^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}f^{-1}(2x)$ ۲) $-3f^{-1}(2x)$ ۳) $\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ ۴) $\frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{x}{3}\right)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$h(x)=-3f(2x)=y\Rightarrow\begin{cases} y=h(x) \ - \ \xrightarrow{\text{از طرفین } h^{-1}} h^{-1}(y)=x \quad (1) \\ y=-3f(2x)\rightarrow\frac{-y}{3}=f(2x)\xrightarrow{\text{از طرفین } f^{-1}} f^{-1}\left(-\frac{y}{3}\right)=2x\rightarrow x=\frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{y}{3}\right)(2)\end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم.

$$h^{-1}(y)=\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{-y}{3}\right) \ \rightarrow \ h^{-1}(x)=\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{-x}{3}\right)$$

۲۷. در صورتی که باقی مانده تقسیم ax^6+bx^3+1 بر x^3+1 برابر ۱ باشد باقیمانده تقسیم $x^2+ax+2b$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$f(x)=a(x^3)^2+b(x^3)+1=a(-1)^2+b(-1)+1=1 \ \rightarrow \ a-b=0$

$f(-2)=4-2a+2b=4-2(a-b)=4$

$x^3-x=0 \ \rightarrow \ x^3=x$

۲۸. اگر $f(x)$ بر $1-2x^2$ بخش‌پذیر باشند $f(\sin x)$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\sin 2x$ ۳) $\cos^2 x$ ۴) $\cos 2x$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\left(1-2x^2\right)Q(x)$$

$$f(\sin x)=\left(1-2\sin^2 x\right)Q(\sin x)=(\cos 2x)Q'(x)$$

یادآوری : $1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$

۲۹. حاصل عبارت $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

فرض کنید $\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}=\alpha$ پس : $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. می‌خواهیم $\cos\alpha$ را بیابیم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha\frac{3}{5}$$

توجه کنید α در ناحیه اول است و $\cos\alpha$ مثبت است.

یادآوری: $\operatorname{Arcsin}(-x)=-\operatorname{Arcsin}x\ ,\ -1\le x\le 1\ ,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \alpha\in R$

۳۰. کدام یک از روابط a و b برقرار باشد تا دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=\cos ax\cos bx-\sin ax.\sin bx$ برابر π باشد؟

۱) $a-b=1$ ۲) $a-b=2$ ۳) $a+b=1$ ۴) $a+b=2$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

با استفاده ازدستور مثلثاتی $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ رابطه را ساده می‌کنیم و سپس دوره‌ی تناوب را می‌یابیم.

$$f(x)=\cos(a+b)x \to T=\frac{2\pi}{a+b}=\pi \to a+b=2$$

۳۱. خارج قسمت تقسیم عبارت $(x-1)^3(x+1)+2x^3-2x$ بر x^2-1 چقدر است؟

۱) x^2+1 ۲) $x+1$ ۳) $2x$ ۴) $(x+1)^2$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$(x-1)^3(x+1)+2x^3-2x=(x-1)^2(x^2-1)+2x(x^2-1)=(x^2-1)\left[(x-1)^2+2x\right]$$

چون عبارت شامل عامل (x^2-1) است، پس باقی مانده تقسیم صفر است و خارج قسمت $(x-1)^2+2x$ یعنی x^2+1 می‌باشد.

۳۲. مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $3x^3-10x^2$ بر $3x-1$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : کافی است $Q(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$3x^3-10x^2=(3x-1)Q(x)-1 \xrightarrow{x=1} -7=2Q(1)-1 \Rightarrow Q(1)=-3$$

۳۳. اگر $\sin x+\frac{1}{\sin x}=2$ باشد آنگاه مقدار عبارت $\sin^2 x+\cos^5 x$ چقدر است؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : اگر a مثبت باشد، می‌دانیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

$$a+\frac{1}{a}=2 \rightarrow a=1$$

$$\sin x+\frac{1}{\sin x}=2 \rightarrow \sin x=1 \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x=0$$

$$\sin^2 x+\cos^5 x=1+0=1$$

۳۴. حاصل کسر $\frac{-\sin x+\sin 2x-\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\tan 2x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\tan 2x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\frac{-\sin x+\sin 2x-\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x}=\frac{-\sin x-2\sin x\cos 3x}{\cos x+2\cos x\cos 3x}=-\frac{\sin x(1+2\cos 3x)}{\cos x(1+2\cos 3x)}=-\tan x$$

۳۵. اگر $۳\cos x+\sqrt{۳}\sin x=۳$ ، $\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول :

$$۳\cos x+\sqrt{۳}\sin x=۳\rightarrow\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۳}\rightarrow\sin x+\frac{\sin ۶۰}{\cos ۶۰}\cos x=$$

$$\sqrt{۳}\rightarrow\frac{\sin x\cos ۶۰+\sin ۶۰\cos x}{\cos ۶۰}=\sqrt{۳}$$

$$\rightarrow\frac{\sin(x+۶۰)}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}\rightarrow\sin(x+۶۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\cos(۹۰-(x+۶۰))=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow$$

$$\cos(۳۰-x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۶. حاصل عبارت $۲\cos^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-x\right)-\cos^۲ x\left(۱+\tan^۲ x\right)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin ۲x$ ۲) $-\cos ۲x$ ۳) $-\sin ۲x$ ۴) $\cos ۲x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

راه اول: $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$: می‌دانیم

$$۲\cos^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-x\right)-\cos^۲ x\underbrace{\left(۱+\tan^۲ x\right)}_{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=۲\cos^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-x\right)-۱=$$

$$\cos ۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-x\right)=\cos\left(\frac{۷\pi}{۲}-۲x\right)=-\sin ۲x$$

راه دوم : اگر در عبارت $x=\frac{\pi}{۴}$ قرار دهیم:

$$۲\cos^۲\left(\frac{۶\pi}{۴}\right)-\cos^۲\frac{\pi}{۴}\left(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴}\right)=۰-\frac{۱}{۲}(۱+۱)=-۱$$

اگر در گزینه‌ها $x=\frac{\pi}{۴}$ قرار دهیم، گزینه ۳، ۱ـ می‌شود.

۳۷. حاصل $\sin^{۲}(x+y)+\sin^{۲}(x-y)+\cos ۲x\cos ۲y$ برابر است با :

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $۲\cos ۲x\cos ۲y$ ۴) $\cos(۲x+۲y)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

راه اول: اگر $y=۰$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ را فرض کنیم ، خواهیم داشت:

$$\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}+۰\right)+\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-۰\right)+\cos\frac{\pi}{۳}\cos ۰=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=۱$$

راه دوم:

$$\sin^{۲}(x+y)+\sin^{۲}(x-y)+\cos ۲x\cos ۲y=$$

$$\frac{۱-\cos(۲x+۲y)}{۲}+\frac{۱-\cos(۲x-۲y)}{۲}+\frac{۱}{۲}\left(\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y)\right)=$$

$$\frac{۱}{۲}\left(۲-\cos(۲x+۲y)-\cos(۲x-۲y)+\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y)\right)=۱$$

۳۸. اگر $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ و $\tan\alpha=k$ باشد آنگاه $\tan\frac{\alpha}{۲}$ چقدر است؟

۱) $\frac{-۱-\sqrt{۱+k^{۲}}}{k}$ ۲) $\frac{-۱\pm\sqrt{۱+k^{۲}}}{k}$ ۳) $\frac{-۱+\sqrt{۱+k^{۲}}}{k}$ ۴) $\frac{-۱\pm\sqrt{۱+k}}{k}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\tan\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\rightarrow k=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\rightarrow k-k\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}=۲\tan\frac{\alpha}{۲}\rightarrow$$

$$k\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}+۲\tan\frac{\alpha}{۲}-k=۰$$

$$\rightarrow\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+k^{۲}}}{k}$$

چون $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $۰<\frac{\alpha}{۲}<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan\frac{\alpha}{۲}$ مثبت است و $k=\tan\alpha$ هم مثبت است. پس:

$$\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{-۱+\sqrt{۱+k^{۲}}}{k}$$

۳۹. حاصل عبارت $8\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\cos 20^\circ$ ۳) $\sin 20^\circ$ ۴) 1

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول:

$$8\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = 8\times\frac{1}{2}\left(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ\right)\cos 20^\circ = 8\times\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 40^\circ\right)\cos 20^\circ =$$

$$-2\cos 20^\circ + 4\cos 40^\circ \cos 20^\circ = -2\cos 20^\circ + 4\times\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ\right) =$$

$$-2\cos 20^\circ + 2\cos 60^\circ + 2\cos 20^\circ = 2\cos 60^\circ = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

راه دوم : عبارت را در $\sin 20^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2\times 2\times 2\overbrace{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}^{\sin 40^\circ}\cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\times 2\overbrace{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}^{\sin 80^\circ}\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin\left(180^\circ - 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1$$

۴۰. عبارت $\tan\left(3\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arccos}\frac{1}{2}\right)$ برابراست با:

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم : $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ و $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ ، بنابراین:

$$\tan\left(3\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arccos}\frac{1}{2}\right) = \tan\left(3\times\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

۴۱. $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{۳}{۵}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

با فرض $\operatorname{Arcsin}\frac{۳}{۵}=\alpha$ داریم: $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α در ناحیه اول دایره مثلثاتی است. $\cos\alpha$ را می‌خواهیم. می‌دانیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۴}{۵}$$

توجه کنید در ربع اول کسینوس مثبت است.

$$\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{۴}{۵}\right)\right)=\cos\left(-\operatorname{Arcsin}\frac{۴}{۵}\right)=\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{۴}{۵}\right)$$

۴۲. جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)=۱$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)=۱ \rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi \rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

۴۳. معادله‌ی $\tan ۳x=\tan ۲x$ در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\tan ۳x=\tan ۲x \Rightarrow ۳x=k\pi+۲x \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow x=۰\,,\,\pi\,,\,۲\pi$$

پس معادله سه ریشه دارد.

۴۴. تمام جواب‌های معادله‌ی $\tan ۳x - \cot ۲x = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۰}+\frac{k\pi}{۵}$ ۳) $\frac{k\pi}{۵}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۰}+\frac{k\pi}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می دانیم $\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cot\alpha$ پس :

$$\tan ۳x = \cot ۲x = \tan\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)$$

پس : $۳k = k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x \Rightarrow ۵x = k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$

۴۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی $\sin ۲x\cos ۵x + \sin ۵x \cos ۲x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲۱}$ ۳) $\frac{\pi}{۷}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ پس :

$$\sin(۲x+۵x)=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \sin ۷x=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} ۷x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & (۱) \\ ۷x = ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} & (۲) \end{cases}$$

در معادله‌ی (۱) به ازای $k=۰$ ، جواب $۷x=\frac{\pi}{۶}$ یعنی $x=\frac{\pi}{۴۲}$ به دست می‌آید.

۴۶. اگر $\frac{۵\pi}{۲}<x<۳\pi$ آن گاه کدام رابطه‌ی زیر همواره درست است؟

۱) $\tan x+\cot x>۰$ ۲) $\tan x+\cot x<۰$ ۳) $\tan x-\cot x>۰$ ۴) $\tan x-\cot x<۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

کمان x در ناحیه‌ی دوم است. پس $\tan x<۰$ و $\cot x<۰$ لذا $\tan x+\cot x<۰$.

۴۷. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\cos ۵x = ۲\cos^۲ x - ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۷}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۷}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۷}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم $۲\cos^۲ x - ۱ = \cos ۲x$ پس :

$$\cos ۵x = \cos ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi \pm ۲x$$

$$۵x = ۲k\pi + ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \qquad (۱)$$

$$۵x = ۲k\pi - ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷} \qquad (۲)$$

به ازای $k = ۲$ در معادله‌ی دوم، گزینه‌ی (۴) به دست می‌آید.

۴۸. معادله‌ی $\sin x \cos x = \cos^۲ x - \frac{۱}{۲}$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

برای حل معادله‌ی $\sin x . \cos x = \cos^۲ x - \frac{۱}{۲}$ ابتدا طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\sin ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = \cos ۲x \rightarrow \sin ۲x = \cos ۲x \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos ۲x} \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۱$$

$$\rightarrow \tan ۲x = ۱ \rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \rightarrow \begin{cases} k = ۰ \rightarrow x = \frac{\pi}{۸} \\ k = ۱ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۸} \\ k = ۲ \rightarrow x = \frac{۹\pi}{۸} \\ k = ۳ \rightarrow x = \frac{۱۳\pi}{۸} \end{cases}$$

۴۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۳x+\sin x=۰$ کدام است؟

۱) $k\frac{\pi}{۲}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

با استفاده از دستور مثلثاتی $\sin a+\sin b=۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$ داریم:

$$\sin ۳x+\sin x=۰ \rightarrow ۲\sin ۲x\cos x=۰ \rightarrow ۴\sin x.\cos^{۲} x=۰$$

پس جواب‌های معادله‌ی $\sin x=۰$ و $\cos x=۰$ هستند که کلیه‌ی کمان‌های x به صورت مضربی از ربع دایره‌ها است، لذا جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}$ است.

۵۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin ۳x+\sin x}{\sin x}=۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه اول : با شرط $\sin x\neq ۰$ ، طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم. لذا:

$$\sin ۳x+\sin x=\sin x \rightarrow \sin ۳x=۰ \rightarrow ۳x=k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}$$

اما چون ریشه‌های مخرج یعنی $k\pi$ باید حذف شود. جواب کلی $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ خواهد بود.

راه دوم: با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\frac{۲\sin ۲x\cos x}{\sin x}=۱ \rightarrow \frac{۲(۲\sin x\cos x)\cos x}{\sin x}=۱$$

با شرط $\sin x\neq ۰$ داریم:

$$۴\cos^{۲} x=۱ \rightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲} \rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۵۱. حاصل $\cos x.\cos ۲x$ به ازای $x=۳۶$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : صورت و مخرج را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x.\cos ۲x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۱۴۴^\circ}{\sin ۳۶^\circ}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^\circ}{\sin ۳۶^\circ}=\frac{۱}{۴}$$

۵۲. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x)=۲\left[\frac{x}{۲}\right]-۳\left[\frac{x}{۳}\right]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» x : اضافه و کم کنید.

$$y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]-x-\left(۳\left[\frac{x}{۳}\right]-x\right)=۲\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\frac{x}{۲}\right)-۳\left(\left[\frac{x}{۳}\right]-\frac{x}{۳}\right)$$

$$T_۱=۲ \qquad T_۲=۳ \qquad \rightarrow \quad T_{\text{کل}}=[۲,۳]=۶$$

۵۳. دوره تناوب اصلی تابع $y=\frac{\sin ۲x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) متناوب نیست.

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$y=\frac{\sin ۲x}{\sin x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\sin x}=۲\cos x\ ,\ x\neq k\pi \ \rightarrow\ T=۲\pi$$

۵۴. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دو جمله‌ی اول برابر ۷/۵ و مجموع جملات سوم و چهارم، برابر ۵/۵ است. قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : براساس فرمول $a_n=a_۱+(n-۱)d$ در تصاعد حسابی داریم:

$$\begin{cases}a_۱+a_۲=۷/۵\\ a_۳+a_۴=۵/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+(a_۱+d)=۷/۵\\ (a_۱+۲d)+(a_۱+۳d)=۵/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a_۱+d=۷/۵\\ ۲a_۱+۵d=۵/۵\end{cases}\Rightarrow d=\frac{-۱}{۲}$$

۵۵. بین اعداد ۱۲ـ و ۵۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این سه واسطه‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$d=\frac{۵۲-(-۱۲)}{۳+۱}=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

لذا جملات به صورت زیر خواهند بود:

$$-۱۲\ ,\ ۴\ ,\ ۲۰\ ,\ ۳۶\ ,\ ۵۲$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \ |$$

$$=۴+۲۰- \quad \text{جمع}$$

۵۶. جملات پنجم و نهم از تصاعد حسابی به ترتیب برابر ۱ و ۷ می‌باشد، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۳۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

طبق معلومات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_9 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 1 \\ a_1 + 8d = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{3} \\ a_1 = -5 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\left[2(-5) + (12-1)\frac{3}{2}\right] \Rightarrow S_{12} = 6\left(-10 + \frac{33}{2}\right) = 39$$

۵۷. هرگاه داشته باشیم $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + ... + 2^2 - 1^2$ مقدار S چقدر است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۹ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + ... + 2^2 - 1^2 = (10-9)(10+9) + (8-7)(8+7) + ... + (2-1)(2+1) = 10 + 9 + 8 + ... + 1$$

اما مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا nبرابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ پس : $S = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

۵۸. در یک تصاعد هندسی، جمله سوم مساوی است با جمله دوم به علاوه دو برابر جمله اول، کدام دو عدد می‌تواند قدر نسبت این تصاعد باشند؟

۱) ۱- و ۲- ۲) ۱- و ۲ ۳) ۱ و ۲ ۴) ۱ و ۲-

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم جمله nام تصاعد هندسی از رابطه‌ی $a_n = aq^{n-1}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \Rightarrow aq^2 + 2a \Rightarrow a\left(q^2 - q - 2\right) = 0 \Rightarrow a(q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

۵۹. در یک تصاعد هندسی جمله دوم، شش و جمله پنجم چهار برابر جمله سوم است جمله اول آن چقدر است؟

۱) $\pm\frac{1}{3}$ ۲) فقط ۳ ۳) فقط ۳- ۴) ± 3

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$t_2 = 6 \ , \ t_5 = 4t_3 \Rightarrow t_1 q^4 = 4t_1 q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow t_2 = 6$$

$$\Rightarrow t_1 q = 6 \Rightarrow t_1(\pm 2) = 6 \Rightarrow t_1 = \pm 3$$

۶۰. حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی چهار برابر جمله‌ی اول است، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

اگر جمله اول را a مشخص کنیم، در این صورت حد مجموع به صورت $S=\frac{a}{۱-q}$ خواهد بود که :

$$\frac{a}{۱-q}=۴a \Rightarrow ۱-q=\frac{۱}{۴} \Rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

۶۱. در یک تصاعد هندسی جمله‌ی اول ۱۶ و حد مجموع جملات $\frac{۳۲}{۳}$ می‌باشد. جمله چهارم آن کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴-

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : مشخص کنیم جمله اول a در این صورت حد مجموع آن به صورت $S=\frac{a}{۱-q}$ خواهد بود. بنابراین :

$$\frac{۳۲}{۳}=\frac{۱۶}{۱-q} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱-q} \Rightarrow ۱-q=\frac{۳}{۲} \rightarrow q=-\frac{۱}{۲}$$

جمله چهارم $=a_۴=a_۱q^۳=۱۶\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳=-۲$

۶۲. در یک تصاعد عددی $S_n=\frac{۱}{۳}n^۲$ (مجموع n جمله اول)، مجموع جمله‌های نهم و دهم و یازدهم این تصاعد کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۹ ۳) ۸ ۴) ۱۸

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\underbrace{a_۱,a_۲,\dots,a_۸}_{s_۸},\overbrace{a_۹,a_{۱۰},a_{۱۱}}^{s_{۱۱}} \Rightarrow a_۹+a_{۱۰}+a_{۱۱}=S_{۱۱}-S_۸=\frac{۱}{۳}\left(۱۱^۲-۸^۲\right)=۱۹$$

۶۳. در یک تصاعد عددی که ۸۰ جمله دارد مجموع سه جمله اول ۶ و مجموع سه جمله‌ی آخر ۲۴ است، مجموع هشتاد جمله‌ی این تصاعد کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$(a_۱+a_۲+a_۳)+(a_{۷۸}+a_{۷۹}+a_{۸۰})=۲۴+۶ \Rightarrow a_۱+a_{۸۰}=a_۲+a_{۷۹}=a_۳+a_{۷۸}=۱۰$$

$$S_{۸۰}=\frac{۸۰}{۲}(a_۱+a_{۸۰})=۴۰\times۱۰=۴۰۰$$

۶۴. اگر $\log_{۱۶}^{N}=\frac{۳}{۲}$ ، N کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول :

$$\log_{۱۶} N=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۲^۴} N=\frac{۱}{۴}\log_{۲} N=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۲} N=۶ \Rightarrow N=۲^۶=۶۴$$

راه دوم:

$$\log_{۱۶} N=\frac{۳}{۲} \Rightarrow N=۱۶^{\frac{۳}{۲}}=\left(۲^۴\right)^{\frac{۳}{۲}}=۲^۶=۶۴$$

۶۵. اگر $\log_{n}^{N}=x$ باشد، $\log_{a^n}^{N}$ کدام است؟

۱) x^n ۲) $\sqrt[n]{x}$ ۳) nx ۴) $\frac{x}{n}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\log_{a^n} N=\frac{۱}{n}\log_{a} N=\frac{۱}{n}x=\frac{x}{n}$$

۶۶. اگر $\log_{۳}^{\frac{۱}{۵۰۰}}=A$ باشد، آنگاه :

۱) $-۵<A<-۴$ ۲) $۴<A<۵$ ۳) $-۶<A<-۵$ ۴) $۵<A<۶$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$۳^۵<۵۰۰<۳^۶ \rightarrow ۳^{-۶}<\frac{۱}{۵۰۰}<۳^{-۵} \rightarrow -۶<\log_{۳}\frac{۱}{۵۰۰}<-۵$$

۶۷. برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۱۲x+۸$ بر بازه‌ی $[-۳,۱]$ کدام است؟

۱) $[-۸,۱۷]$ ۲) $[-۸,۲۴]$ ۳) $[-۳,۱۷]$ ۴) $[-۳,۲۴]$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : چون تابع، همواره پیوسته است پس با یافتن ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در این بازه برد تابع را می‌یابیم.

$$f(x)=x^۳-۱۲x+۸$$

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲=۰ \rightarrow x=\pm ۲ \longrightarrow x=-۲$$

$$f(-۲)=۱۷ \ , \ f(-۲)=۲۴ \ , \ f(۱)=-۳ \rightarrow R_f=[-۳,۲۴]$$

۶۸. برد تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{x^{۳}+۱}{x^{۳}۸}\right]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : با فرض $g(x)=\frac{۳x}{x^{۲}+۱}$ ، ابتدا برد داخل جزء صحیح را می‌یابیم:

$$g=\frac{۳x}{x^{۲}+۱}\rightarrow gx^{۲}+g=۳x\rightarrow gx^{۲}-۳x+g=۰$$

$$\Delta\geq ۰\rightarrow \Delta=۹-۴g^{۲}\geq ۰\rightarrow g^{۲}\leq\frac{۹}{۴}\rightarrow -\frac{۳}{۲}\leq g\leq\frac{۳}{۲}$$

حال باید اعداد صحیح را در این بازه بیابیم:

$$\rightarrow y=\left[g(x)\right]\Rightarrow R_y=\{-۲,-۱,۰,۱\}$$

بنابراین برد تابع شامل ۴ عدد صحیح می‌باشد.

۶۹. برد تابع با ضابطه‌ی $y=x-۶\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳۶ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : با کمک روش مربع کامل کردن برد را می‌یابیم:

$$y=x-۶\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-۳\right)-۹$$

از آنجا که $\left(\sqrt{x}-۳\right)^{۲}\geq ۰$ خواهیم داشت:

$$\left(\sqrt{x}-۳\right)^{۲}\geq ۰\Rightarrow\left(\sqrt{x}-۲\right)^{۲}-۹\geq\Rightarrow y\geq -۹$$

بنابراین برد تابع شامل ۹ عدد صحیح منفی $\{-۹,-۸,\ldots,-۱\}$ است.

۷۰. برد تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}\right)\left(\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۸}\right)$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[\sqrt{۳},+\infty)$ ۳) $[۱۰,+\infty)$ ۴) $[۳+\infty)$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

تابع y، از تابع با ضابطه $yu_{۱}=\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۸}$ و $y_{۲}=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$ تشکیل شده است، دامنه تابع حاصل ضرب، اشتراک دامنه‌ی آنهاست که $x\geq ۱$ خواهد بود هر دو تابع به ازای $x\geq ۱$، مثبت و صعودی خواهند بود. (مشتق بگیرید) $(y'_{۲}>۰\ ,\ y'_{۱}>۰)$.

لذا تابع حاصل ضرب آنها نیز صعودی است پس برد تابع نقاط ابتدا و انتهای دامنه خواهند بود.

$$f(۱)=۱۰\ ,\ \lim_{x\rightarrow+\infty}=+\infty\rightarrow R_f=[۱۰\ ,\ +\infty]$$

سوالات دنباله اعداد

۱. دنباله‌ی $a_n = \dfrac{\left(n^2+2n-1\right)^3-\left(n^2-n-1\right)^3}{(2n+1)(n+1)^4}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n-1)^3-(n^2n-1)^3}{(2n+1)(n+1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(3n^4+\ldots+3)}{2n^5+\ldots+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^5}{2n^5}=\frac{9}{2}$$

۲. دنباله‌ی $\left\{\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه « ۱»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\left((1+\frac{1}{n})-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left((1+\frac{1}{n})^3-1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)}{\left((1+\frac{1}{n})-1\right)\left((1+\frac{1}{n})^2+(1+\frac{1}{n})+1\right)}=\frac{1+0}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

۳. دنباله‌ی $a_n=\dfrac{2n-7}{5n-14}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

۱)۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه ی « ۱»

باید $a_n<0$ باشد پس $\dfrac{2n-7}{5n-14}$ با تعیین علامت $\frac{14}{5}<n<\frac{7}{2}$ اما چون باید $n\subset N$ باشد ، فقط $n=3$ قابل قبول است.

۴. کوچکترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n=\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{n+۱}$ کدام است؟

۱) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۳}$ ۲) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۲}$ ۳) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۴}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$a_n=\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{n+۱}$$

$\Rightarrow$ جملات دنباله : $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۲},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۴},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۵},\ldots$

با توجه به جملات دنباله، کوچکترین جمله $a_۲=\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳}$ است. توجه کنید که در این دنباله، جملات با شماره های زوج، منفی هستند و کوچکترین آنها $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳}$ است ، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی زوج، بزرگتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

همچنین جملات با شماره ی فرد، مثبت هستند و بزرگترین آنها $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۲}$است، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی فرد کوچکتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

۵. کدام دنباله همگراست؟

۱) $\left[\frac{n}{۳}\right](\cos n+\sin n)$ ۲) $\sin n-\cos n$

۳) $\left[\frac{-۳}{n}\right](\cos n+\sin n)$ ۴) $\left[\frac{۳}{n}\right](\cos n+\sin n)$

پاسخ : $-\sqrt{۲}<\cos n\pm\sin n<\sqrt{۲}$ بنابراین کران دار است .

$$\lim_{n\to+\infty}[\frac{۳}{n}](\cos n+\sin n)=$$

۰= (کران دار) × ۰

۶. کدام عدد زیر وجود دارد؟

۱)کوچکترین عدد صحیح کوچکتر از ۱ـ ۲) کوچکترین عدد گنگ بزرگتر از ۱ـ

۳) بزگترین عدد صحیح کوچکتر از ۱ـ ۴) بزرگترین عدد گویای کوچکتر از ۱ـ

پاسخ : گزینه ی « ۳ » بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۱- وجود دارد و برابر ۲- است.

۷. رابطه‌ی $U_{n+۲}=U_{n+۱}+U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است اگر $U_۱=U_۲=۱$ باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : دنباله ی داده شده ، دنباله ی فیبوناتچی است،

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵ ,۸۹,...

که جمله ی نهم دنباله ۳۴= U۹ است.

۸. اگر جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۳}{۲^n}\right\}$ برای مقادیر $n\geq n_۰$ در بازه‌ی $(۰,۰/۱۸۷۵)$ قرار گیرند، کوچکترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳» : حد دنباله صفر است پس دنباله به صفر همگراست، پس :

$$\left|\frac{۳}{۲^n}-۰\right|<۰/۱۸۷۵$$

$$\frac{۳}{۲^n}<\frac{۱۸۷۵}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}<\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow ۲^n>\frac{۱۰۰۰۰}{۶۲۵}=۱۶$$

$$\Rightarrow ۲^n>۲^۴\Rightarrow n>۴\Rightarrow n=۵$$

۹. برای مقادیر $n>۳۱$ ، جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{n-۲}{۴n}\right\}$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱۷}{۶۴}\right]$ ۲) $\left[\frac{۱۵}{۶۴},\frac{۱۷}{۶۴}\right]$ ۳) $\left[\frac{۱۵}{۶۴},\frac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴}\right)$

پاسخ : گزینه « ۳»

$$a_n=\frac{n-۲}{۴n}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}$$

$$n\geq ۳۲\rightarrow ۲n\geq ۶۴\Rightarrow\frac{۱}{۲n}\leq\frac{۱}{۶۴}$$

$$\Rightarrow\frac{-۱}{۲n}\geq\frac{-۱}{۶۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}\geq\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\frac{۱۵}{۶۴}\leq a_n<\frac{۱}{۴}$$

۱۰. جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۲n-۱}{۳n+۲}\right\}$ برای مقادیر $n \geq n_۰$ در بازه‌ی $\left(۰/۶۶, \frac{۲}{۳}\right)$ قرارمی‌گیرند کوچکترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۹

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n-۱}{۳n+۲} = \frac{۲}{۳}$$

دنباله ی فوق صعودی است، پس جمله ای از دنباله نیست که بزرگتر از $\frac{۲}{۳}$ باشد ، بنابراین ، شعاع همگرایی برابر است با :

$$\varepsilon = \frac{۲}{۳} - ۰/۶۶ = \frac{۲}{۳} - \frac{۶۶}{۱۰۰} = \frac{۲}{۳۰۰}$$

$$\left|\frac{۲n-۱}{۳n+۲} - \frac{۲}{۳}\right| < \frac{۲}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۳(۳n+۲)} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۳n+۲}{۷} > ۵۰$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ > ۳۵۰ \Rightarrow ۳n > ۳۴۸ \Rightarrow n > ۱۱۶ \Rightarrow n \geq ۱۱۷$$

۱۱. جملات دنباله‌ی $a_n = \frac{n+۲(-۱)^n}{۲n+۱}$ برای اعداد $n \geq M$ همگی در بازه‌ی $(۰/۴۹, ۰/۵۱)$ قرار می‌گیرند کوچکترین عدد طبیعی M کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۶

پاسخ : گزینه « ۳ » : از آنجایی که $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{۱}{۲}$. پس یک همسایگی به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع ۰/۰۱ داریم،دو حالت در نظر می گیریم :

زوج n : $\left|\frac{n+۲}{۲n+۱} - \frac{۱}{۲}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \left|\frac{۳}{۲n+۱}\right| < \frac{۲}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۲n+۱}{۳} > ۵۰$

$$\Rightarrow ۲n+۱ > ۱۵۰ \Rightarrow n > \frac{۱۴۹}{۲} = ۷۴/۵ \Rightarrow M_۱ \geq ۷۵$$

فرد n : $\left|\frac{n+۲}{۲n+۱} - \frac{۱}{۲}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \left|\frac{۵}{۲n+۱}\right| < ۵ \Rightarrow \frac{۲n+۱}{۵} > ۵۰$

$$\Rightarrow \frac{۲n+۱}{۵} > ۵۰ \Rightarrow n > \frac{۲۴۹}{۲} = ۱۲۴/۵ \Rightarrow M_۲ \geq ۱۲۵$$

جملات ردیف زوج از شماره ی ۷۵ به بعد در این بازه قرار دارند و جملات شماره ی فرد از شماره ۱۲۵ ، پس اولین جمله ای از این دنباله که بعد از آن کلیه ی جملات در این بازه قرار گیرند جمله ی ۱۲۴ ام است.

۱۲. دنباله‌ی $-\left\{\frac{۲^{۳n+۲}+۸^{n+۱}}{۲^{۳n+۱}+۸^{n}}\right\}$

۱)همگرا به ۲ است. ۲) همگرا به ۸ است. ۳) همگرا به ۴ است. ۴) واگراست .

پاسخ : گزینه « ۳»

$$a_n=\frac{۲^{۳n+۲}+۸^{n+۱}}{۲^{۳n+۱}+۸^{n}}=\frac{۸^{n}.(۴)+۸^{n}.(۸)}{۸^{n}.(۲)+۸^{n}}=\frac{۱۲(۸^{n})}{۳(۸^{n})}=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=۴$$

۱۳. دنباله‌ی $U_n=\frac{۱}{۱-\left[\frac{-۱}{n}\right]}$ همگراست به:

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه « ۳»

$$\forall n\in N\ ,-۱\le -\frac{۱}{n}<۰\Rightarrow\left[-\frac{۱}{n}\right]=-۱$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{۱}{۱-\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{۱}{n}\right]}=\frac{۱}{۱-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴. دنباله‌ی $a_n=\left\{\sqrt{n^{۲}+۴n}-\sqrt{n^{۲}+۲n}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to+\infty}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{۲}+۴n-n^{۲}-۲n}{\sqrt{n^{۲}+۴n}+\sqrt{n^{۲}+۲n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n}{n\left(\sqrt{۱+\frac{۴}{n}}\right)+n\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n}{n+n}=۱$$

۱۵. کدام دنباله به صفر همگراست؟

۱) $\left\{\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n-1}\right\}$

۲) $\left\{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right\}$

۳) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{9n+1}}\right\}$

۴) $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : زیرا وقتی $n \to +\infty$، رشد 2^n بسیار بیش تر از n^2 می باشد.

۱۶. کدام دنباله واگراست؟

۱) $\left\{\dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}\right\}$

۲) $\left\{\left(n^2\right)^{(-1)^{2n-1}}\right\}$

۳) $\left\{\sin\left(4n+1\right)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

۴) $\left\{\left[1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$

پاسخ : گزینه ی (۴) واگرا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right]=\begin{cases} , & n \\ 1 , & n \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 1$

۱۷. در کدام مجموعه‌ی زیر از اعداد حقیقی، یکی از کران‌های پائین در خود مجموعه است؟

۱) $\{x : x|x| \leq -1\}$

۲) $\{x : [x]=2\}$

۳) $\{x : [-x]=-2\}$

۴) $\{x : 2-x \geq |x|\}$

پاسخ : گزینه ی « ۲» $\{x : [x]=2\}=\{x : 2 \leq x < 3\}=\{2,3\}$

کران های پایین این مجموعه، مجموعه ی [۲ ، ∞-) است. همانطور که مشاهده می شود عدد ۲ یکی از کران های پایین مجموعه ی (۳ ، ۲] می باشد که در این مجموعه نیز قرار دارد.

۱۸. اگر مجموعه‌ی $\left\{\dfrac{1}{x} | x \in A\right\}$ کران‌دار باشد، A کدام مجموعه‌ی زیر می‌تواند باشد؟

۱) Q

۲) $Z-\{0\}$

۳) $R-Q$

۴) $(0,1]$

پاسخ : گزینه ی «۲» در $Z-\{0\}$ اعضای مجموعه عبارتند از :

$$\ldots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$$

لذا مجموعه کران دار است .

۱۹. کوچک‌ترین کران بالای $A=\left\{n\in Z \mid n=-x^{۲}-۸x \ , \ x\in R\right\}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

پاسخ : گزینه ی « ۳ »

$$y=-(x^{۲}+۸x)=-(x+۴)^{۲}+۱۶$$

$$\Rightarrow y\leq ۱۶ \Rightarrow n\leq ۱۶ \Rightarrow \sup(A)=۱۶$$

۲۰. کدام دنباله از بالا و پائین کران‌دار و نزولی است؟

۱) $u_n=\frac{۲^n}{n^{۲}}$ ۲) $u_n=(-۱)^n$ ۳) $u_n=\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ ۴) $u_n=\frac{n^{۲}+۱}{n^{۲}+۴}$

پاسخ : گزینه ی « ۳»

دنباله ی $\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ همگرا به یک است و کران دارد.

$u_n=۱+\frac{۲}{n^{۲}+۱}$ با افزایش n ، $n^{۲}+۱$ افزایش ، پس $\frac{۲}{n^{۲}+۱}$ کاهش می یابد و کل عبارت نزولی خواهد بود و دنباله ی $\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ نزولی خواهد بود.

۲۱. بزرگترین کران پائین دنباله با جمله‌ی عمومی $U_n=\frac{۳^n}{n^{۳}}$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی « ۳»

با نوشتن چند جمله ای دنباله ، خواهیم داشت :

$$۳,\frac{۹}{۸},۱,\frac{۸۱}{۶۴},\frac{۲۴۳}{۱۲۵},\ldots$$

صعودی نزولی

با توجه به مقادیر، دیده می شود که در این دنباله ، از جمله ی سوم به بعد دنباله صعودی خواهد بود، پس بزرگترین کران پایین آن جمله ی سوم یعنی $u_{۳}=۱$ خواهد بود.

۲۲. کوچکترین کران بالای دنباله‌ی با جمله عمومی $U_n = \frac{۳n^۲ - ۲n}{۴n^۲ + ۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه « ۴»

این دنباله صعودی است $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{۳}{۴}, U_n : \frac{۱}{۹}, \frac{۸}{۲۱}, \ldots$

بنابراین حد دنباله یعنی $\frac{۳}{۴}$ کوچک ترین کران بالای دنباله است.

۲۳. دنباله‌ی $\left\{۱+\frac{(-۱)^n}{n+۱}\right\}$ چگونه است؟

۱)واگرا ۲) بی‌کران ۳) نه صعودی، نه نزولی ولی هم‌گرا ۴) نزولی و هم‌گرا

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$\lim_{n\to+\infty}(۱+\frac{(-۱)^n}{n+۱}) = ۱+\frac{-۱,۱}{+\infty} = ۱+۰ = ۱$$

کران دار → دنباله همگرا →

از طرفی جملات دنباله روند یکنوایی ندارد . دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲۴. کدام دنباله صعودی و کران‌دار است؟

۱) $U_n = \frac{n^۲+۱}{n+۲}$ ۲) $U_n = \frac{n^۲+۲}{n+۱}$ ۳) $U_n = \cos\frac{\pi}{n}$ ۴) $U_n = \cos\frac{n\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه ی « ۳» در گزینه ی « ۳» وقتی n = ۱ است ، جواب ۱- و وقتی n = ۲ جواب صفر و وقتی n زیاد می شود، $\frac{\pi}{n}$ به سمت صفر میل می کند. پس حد دنباله عدد یک و دنباله صعودی است.

۲۵. دنباله‌ی $u_n = n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ برای $n \geq ۲$ چه نوع دنباله‌ای است؟

۱)صعودی ـ کران‌دار از بالا و پائین

۲) نزولی ـ کران‌دار از بالا و پائین

۳) صعودی ـ فقط از پائین کران‌دار

۴) نزولی ـ فقط از بالا کران‌دار

پاسخ : گزینه ی « ۲» ابتدا چند جمله ای اول دنباله را می نویسیم :

$$u_n = n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \Rightarrow u_n > ۰$$

$$u_۲ = ۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \Rightarrow u_۲ > \frac{۸}{۹}$$

$$u_۳ = ۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ \Rightarrow u_۳ > \frac{۸}{۹}$$

$$u_۴ = ۴\left(\frac{۲}{۳}\right)^۴ \Rightarrow u_۴ > \frac{۶۴}{۸۱}$$

با توجه به جملات، دنباله نمی تواند صعودی باشد، پس با توجه به گزینه ها دنباله نزولی می شود و چون دنباله دارای کران پایین است. (جملات همواره مثبت هستند). هر دنباله ی نزولی که کران پایین دارد همگرا می شود، الزاماً دنباله همگرا است. پس کراندار نیز می باشد، یعنی کران پایین و بالا دارد.

۲۶. اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۲}$ و تابع $f(x) = (x+۱)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n+۱}{n+۲} = ۲$$

برای این که ببینیم دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود یا بیشتر، کافیست $a_n - ۲$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی کنیم:

$$(a_n - ۲) = \left(\frac{۲n+۱}{n+۲} - ۲\right) = \frac{-۳}{n+۲}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی ، $\frac{-۳}{n+۲}$ مقداری منفی است پس $a_n = ۲ < ۰$ و در نتیجه $a_n < ۲$. بنابراین دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود.

پس :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{a_n \to ۲^-}(a_n) = \lim_{x\to ۲^-}$$

لذا :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(x+۱)[x] = (۲+۱)[۲^-] = ۳$$

۲۷. کدام توصیف در دنباله‌ها درست است؟

۱)هر دنباله‌ی صعودی واگراست. ۲) هر دنباله‌ی غیریکنوا واگراست.

۳) هر دنباله‌ی کران‌دار همگراست. ۴) هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است.

پاسخ : گزینه ی «۴»

۲۸. اگر $f(x)=\frac{[x]-۳}{x-۴}$ و $a_n=\frac{۴n-۳}{n+۲}$ آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟

۱)همگرا به ۱ـ ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{۴n-۳}{n+۲}=۴$$

$$(a_n-۴)=\left(\frac{۴n-۳}{n+۲}-۴\right)=\frac{-۱۱}{n+۲}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود.

لذا : $\lim_{x\to ۴^-}\frac{[x]-۳}{x-۴}=\frac{۳-۳}{۴^- -۴}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}$

پس دنباله ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

۲۹. دنباله‌ی $a_n=\frac{۳n+۱}{۲n+۱}$:

۱)نزولی و همگرا است. ۲) صعودی و واگراست. ۳) صعودی و همگراست. ۴) نزولی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$a_n=\frac{۳n+۱}{۲n+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}(۲n+۱)-\frac{۱}{۲}}{۲n+۱}\Rightarrow a_n=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲(۲n+۱)}$$

با توجه به تساوی اخیر، با افزایش n مقدار a_n افزایش می یابد، پس دنباله صعودی است، همچنین :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۳n+۱}{۲n+۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow$$

دنباله همگرا است.

۳۰. اگر $a_n = \frac{2n^2+b}{n^2+3n}$ و $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ به ازای کدام مقدار b، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) هر مقدار b ۴) هیچ مقدار b

پاسخ : گزینه ی « ۴»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+b}{n^2+3n} = 2$$

$$\left(\frac{2n^2+b}{n^2+3n}-2\right)=\left(\frac{-6n+b}{n^2+3n}\right)=\frac{-6n}{n^2}=\frac{-6}{n}$$

بنابراین دنباله با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می کند یعنی $a_n < 2$ است.

اما:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x-2)(x+1)}$$

دامنه ی تابع از حل نامعادله ی $(x-2)(x+1)\geq$ به دست می آید. یعنی :

$$D_f = (-\infty,-1] \quad [2,+\infty)$$

بنابراین : $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ وجود ندارد

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ واگراست و به ازای هیچ مقداری از b همگرا نخواهد بود.

۳۱. اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=\left[\left[\frac{x}{2}\right]\right]$ باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست.

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left[\frac{a_n}{2}\right]\right]$$

$$n : \lim_{n\to\infty}\left[\left[\frac{\frac{1}{2n}}{2}\right]\right] = \left[\left[\ ^{+}\right]\right] =$$

زوج

$$n : \lim_{n\to\infty}\left[\left[\frac{\frac{1}{2n}}{2}\right]\right] = \left[\left[\ ^{-}\right]\right] = |-1| = 1$$

فرد

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۳۲. دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n^۳ + ۳n}$:

۱)نزولی و همگراست. ۲) نزولی و واگراست. ۳) صعودی وهمگراست. ۴) صعودی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳ + ۳n} = ۰ \rightarrow$ دنباله هم گراست.

هم چنین می دانیم اگر a_n دنباله ی صعودی و مثبت باشد $\frac{۱}{a_n}$ دنباله ی نزولی است. پس چون $a_n = n^۳ + ۳n$ صعودی است . لذا :

$\frac{۱}{n^۳ + ۳n}$ نزولی است . پس دنباله هم گرا و نزولی است.

۳۳. دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^۲ + ۴n + ۵} - n$:

۱)صعود و هم‌گراست. ۲) صعودی و واگراست. ۳) نزولی و هم‌گراست. ۴) نزولی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^۲ + ۴n + ۵} - n\} = \lim_{n\to+\infty}\{\sqrt{(n+۲)^۲ + ۱} - n\}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(n + ۲ - n) = ۲ \Rightarrow$$ دنباله همگرا

در این سوال: $\lim_{n\to\infty} a_n = ۲,\ a_۱ = \sqrt{۱ + ۴ + ۵} - ۱ = \sqrt{۱۰} - ۱$

چون $a_۱ > \lim_{n\to\infty} a_n$ پس دنباله نزولی است .

۳۴. دنباله‌ی $\left\{\frac{1+2^n}{3+2^{n-1}}\right\}$ چگونه است؟

۱)کران دار ـ نزولی ۲) کران دار ـ صعودی ۳) بی‌کران ـ نزولی ۴) بی‌کران ـ صعودی

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$$

دنباله ی داده شده همگراست پس کراندار نیز هست.

با توجه به گزینه ها دنباله یا صعودی است یا نزولی، از طرفی چون جمله ی اول آن برابر با یک ($a_1=\frac{3}{4}$) و حد دنباله ۲ می باشد. پس می توان نتیجه گرفت که جملات این دنباله در حال افزایش بوده و دنباله صعودی است.

۳۵. کدام دنباله فقط از پائین کران دار است؟

۱) $u_n=\frac{n+3}{n+2}$ ۲) $u_n=(-1)^n$ ۳) $u_n=\frac{1}{n}$ ۴) $u_n=\frac{n^2+1}{n+3}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

در گزینه ی «۴» جملات از عدد $\frac{1}{2}$ شروع و به بی نهایت ختم می شوند، پس کران پایین دارد ولی کران بالا ندارد.

سوالات مشتق و حد

۱. در تابع $y=[۲x]+[-x]$ وقتی $x\to\frac{۱}{۲}$ مجموع حد چپ و راست کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه «۲» - از عددگذاری استفاده می کنیم، برای $x\to\frac{۱}{۲}^-$ ، عدد ۰/۴۹ را انتخاب می کنیم :

$$\lim_{x\to ۰/۵^-}([۲x]+[-x])=[۲(۰/۴۹)]+[-۰/۴۹]=۰-۱=-۱$$

برای $x\to\frac{۱}{۲}^+$ ، عدد ۰/۵۱ را انتخاب می کنیم :

$$\lim_{x\to ۰/۵^+}([۲x]+[-x])=[۲(۰/۵۱)]+[-۰/۵۱]=۱-۱=۰$$

۲. حاصلضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+\operatorname{sgn}x$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ : گزینه ی « ۴»

حد راست: $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}([x]+\operatorname{sgn}x)$

$$=[۰^+]+sgm(۰^+)=۰+۱=۱$$

حد چپ: $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}([x]+\operatorname{sgn}x)$

$$=[۰^-]+sgm(۰^-)=-۱-۱=-۲$$

۳. در تابع براکت $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ وقتی $x\to\frac{-۱}{۱۰}$ حد چپ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

پاسخ : گزینه ی «۳»

وقتی $x\to\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$ ، یعنی $x<\frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x}>-۱۰$ ، لذا :

$$\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱۰$$

۴. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^{۲} & x\geq -۱\\ ۲x+۱ & x<-۱\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-۱$ حد دارد؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) ϕ ۴) R

پاسخ : گزینه ی «۳» : برای آن که تابع f در نقطه ی x = -۱ حد داشته باشد باید :

$$\lim_{x\to(-۱)^{+}} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{-}} f(x)$$

پس :

$$\lim_{x\to(-۱)^{+}} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{+}}(x+a)^{۲}=(a-۱)^{۲}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^{-}} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}(۲x+۱)=-۱$$

لذا باید : $(a-۱)^{۲}=-۱$

از آن جایی که معادله ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر،a تهی است.

۵. اگر تابع f در نقطه $x=۱$ حد داشته و $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ـ ۲) ۲ـ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : فرض کنید $\lim_{x\to ۱} f(x)=A$ باشد ، آنگاه

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵\Rightarrow\frac{۲A-۱}{A+۱}=۲A-۱=۵A+۵$$

$$\Rightarrow ۳A=-۶\Rightarrow A=-۲\Rightarrow\lim_{x\to ۱} f(x)=-۲$$

۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x} & ; \quad x>۰\\ -\sqrt{۱+x} & ; \quad x\leq ۰\end{cases}$ حاصل $\lim_{x\to ۰^{-}} f\left(x^{۳}-x\right)$ کدام است؟

۱) ۱ـ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

پاسخ : گزینه ی «۲» برای محاسبه حد چپ تابع $f(x^{۳}-x)$ در x = ۰ ، ابتدا ضابطه ی تابع را در همسایگی چپ x = ۰ به دست می آوریم:

اگر ۰ > x > ۱- باشد ، $x^{۳}>x$ است، بنابراین $x^{۳}-x>۰$ ، لذا :

$$\lim f_{x\to^{-}}(x^{۳}-x)=\lim f_{x\to^{+}}(x)=\lim_{x\to^{+}}\sqrt{۱-x}=۱$$

۷. حد کسر $\frac{\sqrt{\sqrt{x}-۱}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ وقتی $x \to ۱^+$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-۱}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = -$$

برای رفع ابهام عامل صفر شونده را حذف می کنیم:

$$\lim_{x \to ۱^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-۱}{x-\sqrt{x}}} = \lim_{x \to ۱^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}} = \lim_{x \to ۱^+} \sqrt{\frac{۱}{\sqrt{x}}} = ۱$$

۸. حد عبارت $\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ وقتی $x \to -۲$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام $\frac{-}{-}$ دارد .

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP : \lim_{x \to -۲} \frac{۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۸}}}{۱} = \frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۳}{۲}$$

۹. اگر $\lim \frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}} = ۲$ وقتی $x \to -۳$ آنگاه a کدم است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

پاسخ : گزینه « ۴»

حد تابع ابهام $\frac{-}{-}$ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP : \lim_{x \to -۳} \frac{a}{۰-\frac{۵}{۲\sqrt{۵+۱۶}}} = \frac{a}{\frac{-۵}{۲}} = ۲ \Rightarrow a = -۵$$

۱۰. حد عبارت $\frac{\sqrt[۴]{n}-۱}{x\sqrt{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ : گزینه ی « ۴» : حد تابع ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^{۳}}}-۰}{\frac{۳}{۲}\sqrt{x}-۰}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱. حد عبارت $\frac{x^{۳}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^{۲}+۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}-۰}=\frac{۳+۱}{\frac{۱}{۳}}=۱۲$$

۱۲. حد عبارت $\frac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : برای رفع ابهام ابتدا باید قدر مطلق را با علامت مناسب تعیین علامت کنیم از آنجایی که:

$$x^{۲}-x-۲=(x-۲)(x+۱)$$

بنابراین وقتی $x\to ۲^{-}$ ، عبارت داخل قدر مطلق منفی است، لذا :

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(x^{۲}-x-۲)}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(۲x-۱)}{۲-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱۲}}}=\frac{-(۴-۲)}{۲-\frac{۲}{۴}}=\frac{-۳}{\frac{۳}{۲}}=-۲$$

۱۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست

پاسخ : گزینه ی «۱»

وقتی $x\to^-$ ، آنگاه $|\sin x|=-\sin x$ ، پس :

$$\lim_{x\to^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

۱۴. حد کسر $\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$ وقتی $x\to 0^+$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱» : حد تابع ابهام $-$ دارد . با استفاده از هم ارزی داریم:

$$\lim_{x\to^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to^+}\frac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to^+}\frac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to^+}\frac{2}{x+1}=2$$

۱۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴» : با توجه به اتحاد $1-\cos 2x=2\sin^2 x$، می توان نوشت :

$$\lim_{x\to}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to}\frac{2\sin x}{x}=2$$

۱۶. حد کسر $\frac{\sin 2x.\cos x-\sin 2x}{x^3}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی «۲»

با استفاده از هم ارزی مثلثاتی داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\frac{-x^2}{2}\right)}{x^3}=-1$$

۱۷. حد تابع با ضابطه‌ی $\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x \to 0^-$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

وقتی $x \to {}^-$ ،یعنی کمان در ناحیه ی چهارم است و در ناحیه چهارم $\cos x > 0, \sin x < 0$ ، لذا :

$$\lim_{x\to^-} \frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x} = \lim_{x\to^-} \frac{1-\cos x}{(-\sin x)\sin x} = \lim_{x\to^-} \frac{\frac{x^2}{2}}{-x^2} = \frac{-1}{2}$$

۱۸. حد عبارت $\frac{\tan 3x\sqrt{1-\cos 4x}}{x^3+x^2}$ وقتی $x\to 0^+$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۶ ۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to^+} \frac{x-3x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to^+} \frac{x-3x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}} = \lim_{x\to^+} \frac{-2x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to^+} \frac{3x\times 2\sqrt{2}\,|x|}{x^3+x^2} = \lim_{x\to^+} \frac{6\sqrt{2}x^2}{x^2+x^3}$$

$$= \lim_{x\to^+} \frac{6\sqrt{2}x^2}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to^+} \frac{6\sqrt{2}}{1+x} = 6\sqrt{2}$$

۱۹. حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۱»

به ازای [illegible] ، ابهام [illegible] را داریم.لذا با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{[illegible]}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{[illegible]}{1} = -2$$

۲۰. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی« ۱»

۲۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^{+}} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{|\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}} = -$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{۱}{۲}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است.

بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$\frac{\pi}{۲\sqrt{۲x}}$$

۲۲. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی« ۱»

۲۳. حاصل $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^{+}} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{|\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}} = -$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{۱}{۲}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است.

بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$\text{HOP: } \lim_{n\to\frac{1^{+}}{2}} \frac{\pi \sin \pi x}{0-\frac{2}{2\sqrt{2x}}} = \frac{\pi}{-1} = -\pi$$

۲۴. در فاصله $\left[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]-\{۱\}$ ، همواره $\frac{\sin \pi x}{۱-x}\le f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱}\left(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x)\right)=۰$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x)\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}g(x)$$

اما با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}:\lim\frac{\pi\cos \pi x}{-۱}=\frac{\pi(-۱)}{-۱}=\pi$$

لذا بااستفاده از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}\le \lim_{x\to ۱}f(x)\le \lim_{x\to ۱}g(x)$$

پس : $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}=\lim\limits_{x\to ۱}g(x)=\pi$

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\pi$$

۲۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{۱}{x} & ; \quad x\neq ۰ \\ ۰ & ; \quad x=۰ \end{cases}$ در نقطه $x=۰$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱)از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته ۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته ۴) از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}x\sin\frac{۱}{x}=$$

$f(۰)=۰$ و ۰= تابع کران دار ×

از آن جایی که $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=f(\ )$ پس تابع در $x=۰$ پیوسته است و در نتیجه از چپ و راست در $x=۰$ پیوسته است.

۲۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{۲x+|x|} & , \quad x\neq ۰\\ ۱ & , \quad x=۰\end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=۰$ چگونه است؟

۱)از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته

۴) از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to^+} f(x)=\lim_{x\to^+}\frac{\sin x}{۲x+|x|}=\lim_{x\to^+}\frac{x}{۲x+x}=\frac{۱}{۳}$$

$$\lim_{x\to^-} f(x)=\lim_{x\to^-}\frac{\sin x}{۲x+|x|}=\lim_{x\to^-}\frac{x}{۲x-x}=۱$$

و $f(۰)=۱$ ، پس تابع در $x=۰$ پیوستگی چپ دارد ولی پیوستگی راست ندارد.

۲۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲x^۲-x-۱}{x-۱} & , \quad x>۱\\ ax-a+۳ & , \quad x\leq ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است؟

۱)فقط $\frac{۱}{۲}$

۲) فقط ۲

۳) هیچ مقدار a

۴) هر مقدار a

پاسخ : گزینه ی «۴»

باید $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=-$ باشد، لذا :

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم: $HOP: \lim_{x\to ۱^+}\frac{۴x-۱}{۱}=۳$

و

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-a+۳)=۳=f(۱)$$

می بینیم که حدچپ و راست ومقدار در $x=۱$ به ازای هر مقدار a برابر است .

۲۸. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[۲\sin x]$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱)از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته

۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته

۴) از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

پاسخ : گزینه ی«۱»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}[۲\sin x]=[۲(۱^-)]=[۲^-]=۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\left[۲\sin\frac{\pi}{۲}\right]=۲$$

بنابراین تابع در این نقطه نه از راست پیوسته است و نه از چپ.

۲۹. تابع با ضابطه‌ی $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2-4} & x>2\\ k & x=2\\ \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2} & x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوستگی چپ دارد، آنگاه:

۱) $k=0$ ۲) $k=\frac{1}{12}$ ۳) $k=\frac{1}{8}$ ۴) $k=\frac{1}{6}$

پاسخ : گزینه ی «۲» $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}-}{1}=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}}{1}=\frac{1}{12}$$

پس $k=\frac{1}{12}$.

۳۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} & ; \quad x>0\\ a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) & ; \quad x\le 0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

پاسخ : گزینه ی«۲»

$$\lim_{x\to^-} f(x)=\lim_{x\to^+} f(x)=f(\ )$$

$$\lim_{x\to^-} f(x)=\lim_{x\to^-} a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2}=f(\ )$$

$$\lim_{x\to^+} f(x)=\lim_{x\to^+}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=-$$

برای رفع ابهام با استفاده از هم ارزی $1-\cos u\underset{u\to}{\approx}\frac{u^2}{2}$ داریم:

$$\lim_{x\to^+}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to^+}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

$$\frac{a}{2}=2\to a=4$$

۳۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]$ در $x_۰=۲$:

۱)فقط پیوستگی چپ دارد. ۲) فقط پیوستگی راست دارد. ۳) پیوسته نیست. ۴) پیوسته است.

پاسخ : گزینه ی«۴»

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{۲^+}{۲}\right]-\left[\frac{۲^++۱}{۳}\right]=\left[۱^+\right]-\left[۱^+\right]=۱-۱=$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{۲^-}{۲}\right]-\left[\frac{۲^-+۱}{۳}\right]=\left[۱^-\right]-\left[۱^-\right]= \quad - \quad =$$

$$f(۲)=\left[\frac{۲}{۲}\right]-\left[\frac{۲+۱}{۳}\right]=۱-۱=$$

بنابراین تابع در ۲= x پیوسته است.

۳۲. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases} a+\sin^۲ x & , \quad ۰\le x<\frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & , \quad \frac{\pi}{۴}\le x\le ۲\pi \end{cases}$$

روی بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است؟

۱) $\frac{-۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ : گزینه ی « ۱»

باید تابع درمرز ناحیه یعنی $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، لذا :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}(a+\sin^۲ x)=a+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=a+\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+}(\sqrt{۲}\cos ۳x)=\sqrt{۲}\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)=-۱=f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

پس :

$$a+\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۳۳. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax+a+۴ & x\le ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

۱)هیچ مقدار a ۲) هر مقدار حقیقی a

۳) فقط $a=۰$ ۴) فقط $a=۴$

پاسخ : گزینه ی «۳»

تابع ضابطه ی بالا به ازای $x>۱$ پیوسته است و تابع ضابطه ی پایین نیز به ازای $x<۱$ پیوسته است، لذا برای پیوستگی تابع در R کافی است، تابع در $X=۱$ پیوسته باشد، لذا:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{2}-1}{x-\sqrt{x}}=-$$

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP:\lim_{x\to 1+}\frac{2x}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=4$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}(ax+a+4)=2a+4=f(1)$$

لذا:

$$4=2a+4\Rightarrow a=0$$

۳۴. تابع براکت $y=\left[\sqrt{۳x}\right]$ در بازه‌ی $[۳,۴۸]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱)۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه ی «۱» : نمودار تابع $g(x)=\sqrt{3x}$ به صورت زیر است، با توجه به نمودار دیده می شود که تابع همواره صعودی است و تابع $f(x)=[g(x)]$ در نقاطی ناپیوسته خواهد بود که $\sqrt{3x}$ عددی صحیح و مثبت شود، بنابراین:

$$\sqrt{3x=k\ge 0}\Rightarrow 3x=k^{2}$$

از آن جایی که $3\le x\le 48$ است پس $9\le 3x\le 144$ است، لذا تابع در اعداد مربع کامل در این فاصله ناپیوسته است، یعنی:

۱۴۴،۱۲۱ ، ۱۰۰، ۸۱، ۶۴، ۴۹، ۳۶، ۲۵، ۱۶، ۹

اما تابع در ابتدای بازه یعنی $x=3$ از راست پیوسته است (دقت کنید که تابع اکید است) و در $x=48$ (انتهای بازه) ناپیوسته است. زیرا باید در این نقطه پیوستگی چپ داشته باشد، از آن جایی که تابع اکیدا صعودی است، در این نقطه پیوستگی راست خواهد داشت بنابراین تابع در این بازه در ۹ نقطه ناپیوسته است.

۳۵. نمودار تابع براکت $y=[۲\sin x]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دربازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا نمودار تابع $y=2\sin x$ را رسم می کنیم، نمودار این تابع همانند نمودار تابع $y=\sin x$ است فقط عرض هر نقطه را دو برابر می کنیم، نقاط ناپیوستگی تابع نقاطی می توانند باشند که محل تلاقی خط های $y=k(k\in z)$ با نمودار هستند، مگر در نقاطی که تابع در آن نقاط می نیمم نسبی باشد یا احتمالا در نقاط ابتدا و انتهای بازه باشد، از ۹ نقطه ی تلاقی، تابع در نقطه ی A پیوسته است (به دلیل آن تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد) و در نقطه ی B تابع f می نیمم نسبی دارد، پس تابع $y=[2\sin x]$ در این نقطه پیوسته است، لذا تابع در ۷ نقطه در این باره ناپیوسته است.

۳۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۳)\left[\frac{۱}{۳}x-۱\right]$ روی بازه‌ی $(۰,۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

تابع $(x-3)$ در R پیوسته است، لذا نقاط ناپیوستگی تابع $\left[\frac{x-3}{3}\right]$ را می یابیم، بنابراین باید $\frac{x-3}{3}=K$ یا $(k\in z)x=3k$، که در این بازه نقاط ۳ و ۶می توانند نقاط ناپیوستگی تابع باشند، اما در $x=3$ تابع پیوسته است(بدلیل وجود عامل صفر شونده ی $x=3$ در کنارش):

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{1}{3}x-1\right]=(3-3)[\ ^+]=0$$
$$\lim_{x\to 3^-}(x-3)\left[\frac{1}{3}x-1\right]=(3-3)[\ ^-]=0, f(3)=0$$

بنابراین در این بازه، تابع در یک نقطه ناپیوسته است.

۳۷. تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^۲-[x]$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=[x]([x]-1), x\in(-1,2)$$

تابع $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، یعنی در این بازه، تابع در نقاط ۰ و ۱ ناپیوسته است، پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}[x]([x]-1)=[0^+]([0^+]-1)=0\times -1=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}[x]([x]-1)=[0^-]([0^-]-1)=-1\times(-2)=2$$
$$f(0)=0$$

تابع x=1 پیوسته است. بنابراین تابع در این بازه در یک نقطه ناپیوسته است.

۳۸. ریشه‌ی معادله $x^{۳}+x+۱=۰$ در کدام فاصله است؟

۱) $\left(۰,\frac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۱}{۴},۰\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

تابع $f(x)=x3+x+1$ تابعی پیوسته در R است، معادله ی $f(x)=x^3+x+1=0$ در بازه ای حتما ریشه خواهد داشت که حاصل ضرب مقادیر آنها منفی باشد، لذا:

$$f(0)=1>0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}+\frac{1}{4}+1>0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{8}-\frac{1}{2}+1>0$$

$$f\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{-1}{64}-\frac{1}{4}+1>0$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{-27}{64}-\frac{3}{4}+1=\frac{-11}{64}<0$$

بنابراین با امتحان گزینه ها:

$$(1)f(0)f\left(\frac{1}{4}\right)>0$$

$$(2)f\left(\frac{-3}{4}\right)f\left(\frac{-1}{2}\right)<0$$

$$(3)f\left(\frac{-1}{2}\right)f\left(\frac{-1}{4}\right)>0$$

$$(4)f\left(\frac{-1}{4}\right)f(0)>0$$

بنابراین ریشه ی معادله در بازه ی $\left(\frac{-3}{4},\frac{1-}{2}\right)$ خواهد بود.

۳۹. ریشه‌ی معادله‌ی $\sin x = \frac{x}{۳}$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\right)$ ۲) $\left(\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۴}\right)$ ۳) $\left(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۶}\right)$ ۴) $\left(\frac{۵\pi}{۶}, \pi\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{3} = 0$$

$$(1)\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{9} > 0 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9} > 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9} > 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \end{cases}$$

بنابراین در گزینه ی (۲)، $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ لذا معادله ی $\sin x - \frac{x}{3} = 0$ در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

۴۰. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $x^۴ - ۴x + ۱ = ۰$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(۰, \frac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(۱, \frac{۳}{۲}\right)$ ۳) $\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}\right)$ ۴) $\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}\right)$

پاسخ : گزینه ی «۳» : به کمک نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی می توانیم در بازه های داده شده ریشه ی مورد نظر را بیابیم. برای این منظور از کوچک ترین بازه شروع می کنیم:

$$f(x) = X^4 - 4x + 1 = 0$$

$$(1)\begin{cases} f(0) = 0^4 - 4(0) + 1 = 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 > 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 > 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{81} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{-26}{81} < 0 \end{cases}$$

چون $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)$ پس معادله f(x)=0 حداقل یک ریشه در این بازه دارد، می توان ثابت کرد که این معادله یک ریشه قبل از ۱ و یک ریشه بعد از ۱ دارد.

۱ . یکی از ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a+۲)x^{۲}-۷x+۴=a$ بین دو عدد ۱ و ۱ـ است مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $\{a:a<-۲\}$ ۲) $\{a:a>۴\}$ ۳) ϕ ۴) R

پاسخ : گزینه ی «۴»

می دانیم اگر f تابعی پیوسته در بازه ی [a,b] باشد و f(a)f(b)<0 آنگاه معادله ی f(x)=0 در بازه ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد، لذا:

$$f(x)=(a+2)x^2-7x+4-a=0$$

باید f(1)f(-1)<0 باشد، لذا:

$$f(1)=(a+2)-7+4-a=-1$$
$$f(-1)=(a+2)+7+4-a=13$$

از آنجایی که f(1)f(-1)=-13<0 پس معادله همواره یک ریشه در بازه ی (-۱ و ۱) به ازای هر مقدار دلخواه a خواهد داشت.

۴۲. اگر $f(x)=۲^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x)=\frac{۲x-۳}{x+۱}$ ، آنگاه $\lim_{x\to ۰^-}(gof)(x)$ کدام است؟

۱) ۳ـ ۲) ۱ـ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱» : تابع gof را تشکیل می دهیم و سپس حد چپ را در x=0 می یابیم:

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{2(2^{\frac{1}{x}})-3}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

$$\lim gof_{x\to 0^-}(x)=\lim_{x\to 0^-}=\frac{2(2^{\frac{1}{x}})-3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{2(2^{-\infty})-3}{2^{-\infty}+1}$$

$$=\frac{2(0)-3}{0+1}=-3$$

۴۳. حد کسر $\frac{x^k+x^۲+۱}{x^۵+۳x^۲+۱}$ اگر $x\to\infty$ برابراست با :

۱) فقط (۱) ۲) فقط $۰,۱,\infty$ ۳) فقط $\frac{۱}{۳},۱$ ۴) فقط (۰)

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$k>5:\lim_{x\to 00}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2=1}=\lim_{x\to 00}\frac{x^k}{x^5}=00$$

$$k=5:\lim_{x\to 00}\frac{x^5+x^2+1}{x^5+3x^2=1}=\lim_{x\to 00}\frac{x^5}{x^5}=1$$

$$k<5:\lim_{x\to 00}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2=1}\lim_{x\to 00}\frac{x^k}{x^5}=0$$

۴۴. حد کسر $\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$ ، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲ـ است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۲»

از آنجایی که n>3 پس n-2>1 لذا پرتوان مخرج mx^{n-2} است و از آنجایی که حد تابع عددی غیر صفر شده پس در صورت کسر پرتوان x^{m+3} خواهد بود، زیرا درجه ی آن باید از ۱ بیش تر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to 00}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}=\lim_{x\to 00}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2$$

با توجه به حد تابع باید:

$$\begin{cases}\frac{1}{m}=-2\Rightarrow m=\frac{-1}{2}\\ m+3=n-2\xrightarrow{m=\frac{-1}{2}}\frac{-1}{2}+3=n-2\to n=\frac{9}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n=\frac{-1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

۴۵. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^{۲}-۴|}{ax^{۲}-x+۲}=-۱$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۴}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

چون وقتی $x\to\infty$ عبارت داخل قدر مطلق به $+\infty$ میل می کند بنابراین: $[x^2-4]=x^2-4$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x-2}=\frac{1}{a}=1\Rightarrow a=-1$$

حال حد راست عبارت را در $x=-2$ می یابیم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to(2)^+}\frac{|x2-4|}{-x2-x+2}=\lim_{x\to(2)^+}\frac{|x-2||x+2|}{-(x^2+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to(2)^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to(2)^+}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x\to(2)^+\Rightarrow|x-2|=-(x-2)$$

$$x\to(2)^+\Rightarrow|x+2|=x+2$$

۴۶. حد عبارت $\left(\dfrac{x^{۲}+x+۱}{۲x^{۲}+۱}\right)^{\frac{۲x+۱}{x}}$ وقتی $x\to\infty$ چقدر است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $e^{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{1}}=\frac{1}{4}$$

۴۷. حد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+[۲x]+\sqrt{x}}{x+|x-۱|}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+[2x]+\sqrt{x}}{x+|x-1|}=\lim\frac{x+(2x-p)+\sqrt{x}}{x+(x-1)}$$

$$=\lim\frac{3x+\sqrt{x-p}}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

۴۸. حد تابع با ضابطه‌ی $\frac{x^۳-[x^۳]}{۴x^۳+۱}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) حد ندارد

پاسخ : گزینه ی «۱»

می دانیم $u=[u]+p$ که در آن $0\le P<1$، پس :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-[x^3]}{4x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0\le P<1}{4x^3+1}=\frac{-}{\infty}=0$$

۴۹. حد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{\sqrt{-x+۱}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt{-۴x+۱}+\sqrt[۳]{۲۷x}}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) حد ندارد ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x+1}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1}+\sqrt[3]{27x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-4x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4x}}=\frac{1}{2}$$

۵۰. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)\tan\frac{\pi x}{۸}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{8}=0\times\infty$$

عامل بی نهایت است، آن را به مخرج منتقل می کنیم: $\tan\frac{\pi x}{8}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\cot\frac{\pi x}{8}}=-$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$HOP:\lim\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\cot^{2}\frac{\pi x}{8}\right)}=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{-\pi}{8}(1+0)}=\frac{2}{\pi}$$

۵۱. حد تابع $f(x)=\left(۲-\sqrt{x}\right)\left(\cot\pi x+۱\right)$ وقتی $x\to ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۳) $-\frac{۱}{۲\pi}$ ۴) $-\frac{۱}{۴\pi}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim f_{x\to 4}(x)=\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})(\cot\pi x+1)=\times\infty$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})(\cot\pi x+1)$$
$$=\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\cot\pi x+\lim_{x\to 4}2-\sqrt{x}=\lim\frac{2-\sqrt{x}}{\tan\pi x}+0$$

حد فوق ابهام $\frac{}{}$ دارد بنابراین برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP:\lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\pi(1+\tan^{2}\pi x)}=\frac{\frac{-1}{4}}{\pi}=\frac{-1}{4\pi}$$

۵۲. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۴x-۸}-\frac{۱}{x^{۲}-۴}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{x^{2}-4}\right)=\infty-\infty$$

با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{4(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\,1}{4(x+2)}=\frac{1}{16}$$

۵۳. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}\left(\frac{۲x}{x^{۲}-۱}-\left|\frac{x}{x+۱}\right|\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $-\infty$

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا قدر مطلق را با علامت مناسب بر می داریم وقتی $-۱ < x < ۰$ آنگاه در عبارت $\left|\frac{x}{x+1}\right|$ ، صورت کسر منفی و مخرج آن مثبت است ، پس داخل قدر مطلق منفی است ، لذا قدر مطلق را با علامت منفی بر می داریم و خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to(-1)^{+}}\left(\frac{2x}{x^{2}-1}-\left(\frac{-x}{x+1}\right)\right)$$
$$=\lim\left(\frac{2x}{x^{2}-1}+\frac{x}{x+1}\right)=\frac{-2}{0^{-}}+\frac{-1}{0^{+}}+\infty-\infty$$

برای رفع ابهام با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to(-1)^{+}}\frac{2x+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^{+}}\frac{x^{2}+x}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to(-1)^{+}}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

۵۴. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه ی «۱» : به ازای $x=0$ ، به ابهام $\infty-\infty$ می رسیم ، برای رفع ابهام از مخرج مشترک گیری استفاده می کنیم ولی قبل از آن

$$1-\cos\approx\frac{u^2}{2}$$

با استفاده از هم ارزی $u\to 0$ و جایگزینی داریم .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{-x^2}{2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2-x}{x^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

۵۵. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : از هم ارزی رادیکالی استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-|x+1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

۵۶. حد عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x+1}-\sqrt{x^4+x+5}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x+1}-\sqrt{x^4+x+5}\right)=\infty(\infty-\infty)=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج پرانتز ضرب می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x^4+x+1-x^4-x-5\right)}{\sqrt{x^4+x+1}+\sqrt{x^4+x+5}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2}=-2$$

۵۷. در تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۷}\right)\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x+۹}\right)$ وقتی $x\to+\infty$ برابر است با :

۱) ۴ـ　　۲) ۲ـ　　۳) ۱　　۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)$$
$$=(\infty-\infty)(\infty+\infty)=(\infty-\infty)\infty=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج پرانتز اول ضرب می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3-(x+7))\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}-4$$

۵۸. حد عبارت $\left(\frac{x^۲}{x+۱}-\frac{x^۲+x}{x-۱}\right)$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

۱) ۳ـ　　۲) ۲ـ　　۳) صفر　　۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2+x}{x-1}\right)=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x-1)-\left(x^2+x\right)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2-\left(x^3+x^2+x^2+x\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-x}{x^2-1}=-3$$

۵۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x^{۲}+x-۱)(x^{۲}+x+۱)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۳»

برای محاسبه ی مجانب های قائم قابع $y=\frac{\sqrt{x}}{(x^{2}+x-1)(x^{2}+x+1)}$ ، ابتدا مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم ، اگر حد تابع در هر یک از ریشه ها ، مانند ∞, x_0 شود ، در این صورت خط $x=x_0$ مجانب قائم خواهد بود.

بنابر این ریشه های مخرج : ریشه حقیقی ندارد.

$$\begin{cases} x^{2}+x+1=0 \rightarrow \Delta 1-4<0 \\ x^{2}+x-1=0 \rightarrow \Delta 1+5>0 \quad (1) \end{cases}$$

معادله ی (۱) ، دارای دو ریشه ی حقیقی است ، از آن جایی که در این معادله $\frac{c}{a}=-1<0$ ، معادله دارای دو ریشه ی مختلف العلامه است ، یعنی یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی ، از آن جایی که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، دامنه ی تابع شامل اعداد منفی نخواهد بود، پس ریشه ی منفی مخرج، مجانب قائم نخواهد بود، لذا معادله فقط یک مجانب قائم خواهد داشت.

۶۰. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{|x|}{\sqrt{x(۲x-۱)^{۲}(x-۲)}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱» : تابع را به صورت زیر بازنویسی می کنیم : $y=\frac{|x|}{|2x-1|\sqrt{x(x-2)}}$ دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x(x-1)>0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x>2x \quad \iota<0$$

پس $D_y=(-\infty,0) \quad (2,+\infty)$

مخرج کسر دارای سه ریشه ی $x=2, x=0, x=\frac{1}{2}$ است ، $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم نخواهد بود، زیرا همسایگی آن در دامنه وجود ندارد ($x=\frac{1}{2}$ زیر رادیکال را تعریف نمی کند) ، x=۰ از آن جایی که صورت کسر نیز صفر می شود ، باید حد تابع در این نقطه بیابیم :

$$\lim_{x\to 0^{-}}=\frac{|x|}{|2x-1|\sqrt{x(x-2)}}=0$$

از آن جایی که حد تابع ∞ نشده پس x=۰ مجانب قائم نیست . در x=۲ :

$$\lim_{x\to 2^{-}}=\frac{|x|}{(2x-1)\sqrt{x(x-2)}}=\frac{2}{3\sqrt{0^{+}}}=+\infty$$

پس x=۲ مجانب قائم تابع است .

۶۱. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x+1}{|x|+|x-4|-4}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه ی «۳» : ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$D_f = R - \{x : |x| + |x-4| - 4 = 0\}$$

بنابر این با حل معادله ی $|x| + |x-4| = 4$ داریم :

$x < 0 \rightarrow -x - x + 4 = 4 \rightarrow x = 0$ غ ق ق

$0 \le x \le 4 \rightarrow x - x + 4 = 4 \rightarrow 0 \le x \le 4$

$x > 4 \rightarrow x + x - 4 = 4 \rightarrow x = 4$

بنابر این :

$$D_f = R - [0,4] = (-\infty,0) \quad (4,+\infty)$$

تابع در دو نقطه ی ۰ و ۴ مجانب قائم خواهد داشت ، زیرا :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{|x|+|x-4|-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x+1}{|x|+|x-4|-4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

لذا تابع دو خط مجانب قائم x=۰ و x=۴ را دارد.

۶۲. معادله‌ی مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^2 \tan^{-1} x}{3x+2x^2}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{\pi}{4}$ ۲) $y=\frac{\pi}{3}$ ۳) $y=\frac{\pi}{2}$ ۴) $y=\pi$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \tan^{-1} x}{3x+2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \tan^{-1} x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\tan^{-1} x}{2x^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

بنابر این خط $y=\frac{\pi}{4}$ مجانب افقی تابع است . البته با محاسبه ی $\lim_{x \to +\infty} y$ ، مجانب افقی دیگر تابع خط $y=\frac{-\pi}{4}$ است که در گزینه ها وجود ندارد.

۶۳. خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{Ax^{۳}+۱}{(A-۱)x^{۳}+۱۶}$ است. معادله مجانب قائم نمودار f کدام است؟

۱) $x=-۴$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۴$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}=\frac{A}{A-1}+\frac{3}{2}$$

بنابر این : $\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2A=3A\Rightarrow A=3$

بنابر این ضابطه ی تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$f(x)=\frac{3x^3+1}{2x^3+16}$$

مجانب قائم ریشه ی معادله ی $2x^3+16=0$ است ، یعنی :

$$x^3=-8\to x=-2$$

۶۴. اگر $f(x)=\frac{x+۱۱}{x^{۲}-۳x-۴}$ و $g(x)=\frac{۳}{x-۴}$ ، نقطه‌ی تلاقی مجانب های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۴,-۱)$ ۴) $(۴,۰)$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=(f-g)(x)=\frac{x+11}{x^2-3x-4}-\frac{3}{x-4}$$
$$y=\frac{x+11}{(x-4)(x+1)}-\frac{3}{x-4}$$
$$\Rightarrow y=\frac{x+11-3(x+1)}{(x-4)(x+1)}=\frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)}$$
$$\Rightarrow y=\frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)}\overset{x\neq 4}{=}\frac{-2}{x1}$$

بنابر این : $y=(f-g)(x)=\frac{-2}{x+1}$

در این تابع مجانب قائم ریشه ی مخرج یعنی x = -۱ و مجانب افقی برابر است با :

$$\lim_{x\to\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+1}=0\Rightarrow y=0$$

پس نقطه ی (۰ ، ۱-) محل تلاقی مجانب هاست .

۶۵. منحنی به معادله $y=\frac{x^{۲}+۳x}{ax^{۲}+۴x-۱}\ ,\ a\neq ۰$ فقط دو خط مجانب دارد، مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۴}\right)$ ۳) $\left(\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۴}\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با توجه به صورت سوؤال و نظر طراح، تابع یک مجانب افقی حتماً خواهد داشت (دقت کنید که به ازای a =۰ تابع دارای یک مجانب مایل و یک مجانب قائم خواهد بود ولی با حل سؤال و تعیین محل تلاقی نقطه ای به دست می آید که در گزینه ها نیست) معادله ی مجانب افقی تابع $y=\frac{1}{a}$ است، با توجه به آن که تابع تنها دو مجانب دارد، پس باید تنها یک مجانب قائم داشته باشد ، یعنی مخرج تنها یک ریشه بدهد ، لذا :

$$\Delta=0\Rightarrow 16+4a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابر این ضابطه ی تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$y=\frac{x^2+3x}{-4x^2+4x-1}=\frac{x^2+3x}{-(2x-1)^2}$$

پس خطوط $y=\frac{-1}{4}$ و $y=\frac{1}{2}$ مجانب هستند و محل تلاقی آنها نقطه ی $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ خواهد بود.

۶۶. عرض نقطه‌ی تلاقی خط مجانب مایب نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x-۲}$ با محور yها کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴»

درجه ی صورت یک واحد از درجه ی مخرج بیشتر است ، پس با تقسیم صورت به مخرج داریم :

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x-2 \\ \hline -(x^2-2x) & x+2 \\ \hline 2x+1 & \\ -(2x-4) & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$y=x+2$$

بنابر این عرض از مبدأ مجانب مایل (۲) است.

۶۷. یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۲x^۳+ax^۲+۵}{x^۲+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ـ قطع می‌کند a کدام است؟

۱) ۳ـ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۴»

درجه ی چند جمله ای صورت فقط یک واحد از درجه ی جمله ی مخرج بیشتر است. بنابر این مجانب مایل، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج است.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+ax^2+5 & x^2+x \\ \hline \pm 2x^3 \pm 2x^2 & 2x+(a-2) \Rightarrow y=2x+a-2 \\ - \quad \overline{\qquad\qquad} & \\ \quad (a-2)x^2+5 & \\ \pm(a-2)x^2 \pm (a-2)x & \\ - \quad \overline{\qquad\qquad} & \\ -(a-2)x+5 & \end{array}$$

این خط محور x ها را در نقطه ی ۲- = x قطع می کند یعنی نقطه ی (۰ و ۲-) در معادله ی خط صدق می کند . بنابر این داریم :

$$y=2x+a-2 \Rightarrow 0=-4+a-2 \Rightarrow a=6$$

۶۸. مساحتی که مجانب مایل نمودار $y=\frac{x^۳+۴x^۲+|x|+۱}{x^۲+x-۱}$ با محورهای مختصات می‌سازد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۸

پاسخ : گزینه ی «۱»

با تقسیم صورت به مخرج مجانب مایل را می یابیم :

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2+|x|+1 & x^2+x-1 \\ \hline -(x^3+x^2-x) & x+3 \\ \hline 2x^2+|x|+x+1 & \\ -(3x^2+3x-3) & \\ \hline |x|-2x+4 & \end{array}$$

بنابر این معادله ی مجانب مایل y =x +۳ است، با توجه به نمودار مساحت ساخته شده با محورهای مختصات برابر است با :

$$S=\frac{1}{2}(3)(3)=\frac{9}{2}$$

۶۹. دو خط مجانب منحنی $y=ax+1-\sqrt{x^2+bx+c}$ در نقطه $A(-1,3)$ متقاطع هستند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : با استفاده از هم ارزی رادیکالی داریم :

$$y=ax+1-\sqrt{x^2+bx+c}$$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(ax+1-\left|x+\frac{b}{2}\right|\right)$$

$$\begin{cases} y=ax+1-x-\frac{b}{2}\ ,\ x\to+\infty \text{ وقتی } (1) \\ y=ax+1+x+\frac{b}{2}\ ,\ x\to-\infty \text{ وقتی } (2) \end{cases}$$

لذا نقطه ی (۳ ، ۱-) در دو خط صدق می کند :

$$\begin{cases} 3=-a+1+1-\frac{b}{2} \\ 3=-a+1-1+\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}=-1 \\ a-\frac{b}{2}=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-2,\ b=2 \Rightarrow a+b=0$$

۷۰. کدام خط مجانب مایل تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{4x^2+4x}+\sqrt{4x^2+1}$ است؟

۱) $y=4x$　　۲) $y=4x+2$　　۳) $y=4x+4$　　۴) $y=4x+1$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+rx}+\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2\left|x+\frac{1}{2}\right|+2|x|\right)$$

بنابر این :

$$\begin{cases} y=2\left(x\frac{1}{2}\right)+2x\ ,\ x\to+\infty \text{ وقتی } \\ y=-2\left(x\frac{1}{2}\right)-2x\ ,\ x\to-\infty \text{ وقتی } \end{cases}$$

بنابر این خطوط مجانب مایل $y=4x+1$ و $y=-4x-1$ خواهند بود.

۷۱. مجانب‌های تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}$ در کدام نقطه متقاطعند؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(-۱,-۱)$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^{2}+2x}+\sqrt[3]{x^{3}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(|x+1|+x\right)=\begin{cases} y=2x+1, x\to+\infty & \text{وقتی } (1) \\ y=-1, x\to-\infty & \text{وقتی } (2)\end{cases}$$

از حل دستگاه (۱) و (۲) ، نقطه ی تلاقی (۱- ، ۱-) A است.

۷۲. معادله‌ی مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲}}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) $۲y-۲x-۳=۰$ ۲) $۲y+۲x-۳=۰$ ۳) $۲y-۳x+۳=۰$ ۴) $۲y+۲x+۳=۰$

پاسخ : گزینه ی «۴» : به نکته ی زیر توجه کنید :

نکته : در تابع با ضابطه ی $y=\sqrt{\frac{x^{3}+ax^{2}}{x+a'}}$ ، معادله ی مجانب های مایل به صورت زیر است :

$$y=\left|x+\frac{a-a'}{2}\right|$$

بنابر این در این تست :

$$y=\left|x\frac{1-(-2)}{2}\right|=\left|x+\frac{3}{2}\right|$$

وقتی $x\to-\infty$ ، آنگاه معادله ی مجانب مایل برابر است با :

$$y=-x-\frac{3}{2}\Rightarrow 2y+2x+3=0$$

۷۳. اضلاع مثلثی منطبق بر محور xها و مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ است. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ : گزینه ی «۴» : برای محاسبه ی مجانب قائم ریشه ی مخرج را می یابیم می شود

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ چون $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\infty$ بنابر این $x=-1$ مجانب قائم است. همچنین این تابع یک مجانب مایل $y = mx + h$ دارد . برای یافتن معادله ی آن به صورت زیر عمل می کنیم :

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left((x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)-\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)-1$$

ابهام حد $\lim_{x\to\infty}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1$ از نوع $(0\times\infty)$ است بنابر این برای رفع ابهام عامل ∞ را به مخرج می بریم :

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}\right)-1$$

با کمک گویا کردن ، حاصل حد را می یابیم :

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)}\right)-1$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{1}{x}(1+1)}\right)-1=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{2(x+1)}\right)-1$$

$$=-1-1=-2\Rightarrow h=-2$$

پس معادله ی خط مجانب مایل برابر است با :

$$y=x-2$$

حال با رسم مجانب ها در یک دستگاه مختصات داریم :

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{3\times(3)}{2}=4/5$$

دقت کنید که C محل تلاقی مجانب هاست . بنابر این :

$$\begin{cases}x=-1\\ y=x-3\end{cases}\Rightarrow y_C=-3$$

۷۴. کدام تابع مجانب مایل ندارد؟

۱) $y=x+\sqrt{x^{۲}+۱}$ ۲) $y=\frac{x^{۲}}{x+۱}$ ۳) $y=x+\sqrt{x}$ ۴) $y=x+\frac{۱}{x}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم :

$$(1)\ y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+|x|\right)$$

$$\begin{cases} y=2x\ ,x\to+\infty & \text{وقتی} \\ y=0\ ,x\to-\infty & \text{وقتی} \end{cases}$$

$$(2)\ y=\frac{x^{2}}{x+1}=\frac{x^{2}-1+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

وقتی $\frac{1}{x+1},x\to\infty$ به صفر میل می کند و خط y = x - ۱ مجانب مایل تابع است .

$$(3)\ m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x}=1$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}\right)=+\infty$$

تابع فاقد مجانب مایل است .

(۴) در تابع $y=x+\frac{1}{x}$ وقتی $\frac{1}{x},x\to\infty$ به صفر میل می کند و خط y = x مجانب مایل تابع است .

۷۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^{2}-1>0\to x>1\ x \quad \text{یا} \quad x<-1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>1 \end{cases}$$

بنابر این $D_f=(1,+\infty)$ ، بنابر این از ریشه های مخرج فقط x =۱ مجانب قائم است . از طرفی :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{2}-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x+0)\Rightarrow y=x$$

بنابر این تابع یک مجانب مایل و یک مجانب قائم دارد.

۷۶. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{۲}-\sqrt{x}}{|x|-۱}$ دارای

۱)یک مجانب مایل و یک مجانب قائم است.

۲) یک مجانب مایل است.

۳) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

۴) دو مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

پاسخ : گزینه ی «۲»

برای به دست آوردن مجانب قائم ابتدا ریشه های مخرج را می یابیم .

$$|x|-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

خط x = a مجانب قائم است هر گاه $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ بنابر این حد تابع را در هر یک از نقاط ۱= x و ۱- = x می یابیم :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{|x|-1}=\frac{0}{0}$$

در همسایگی $x=1$, $|x|=x$ است بنابر این خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{3}{2}\neq\infty$$

پس ۱= x مجانب قائم نیست . همچنین در ۱- = x داریم :

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{|x|-1}$$

وجود ندارد :

(در همسایگی ۱- = x زیر رادیکال منفی می شود .)

پس ۱- = x نیز مجانب قائم نیست . بنابر این تابع مجانب قائم ندارد. همچنین برای یافتن مجانب مایل داریم :

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-\sqrt{x}}{|x|-1}}{x}\overset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x(x-1)}=1$$

دقت شود که به دلیل وجود $\sqrt{x}$، x نمی تواند به سمت $-\infty$ میل کند.

$$h=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x}-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=1$$

$$\Rightarrow y=mx+h=x+1^*$$

۷۷. منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=x+\sqrt{1-x^2}$:

۱)یک مجانب افقی و یک مجانب مایل دارد. ۲) دو مجانب مایل دارد. ۳) مجانب ندارد. ۴) دو مجانب افقی دارد.

پاسخ : گزینه ی «۳»

دامنه ی تابع بازه ی $D_f=[-1,1]$ است ، پس تابع مجانب افقی و مایل ندارد و از طرفی چون کسری نیست مجانب قائم نیز ندارد.

۷۸. تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\frac{1-x^4}{x^2-4}\geq 0 \Rightarrow D_f=(-2,-1]\ \ [1,2)$$

از آن جایی که دامنه ی تابع محدود است ، پس تابع مجانب افقی و مایل ندارد . تابع دو مجانب قائم دارد . زیرا :

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{-15}{0^-}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}\sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{-15}{0^-}}=+\infty$$

پس تابع دو مجانب قائم x =۲ و x = -۲ دارد.

۷۹. تابع با ضابطه‌ی $y=\tan^{-1}\frac{|x|}{x-1}$ و چند خط مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴»

از آن جایی که تابع $\tan^{-1}u$ تابعی کران دار است ، پس تابع فاقد مجانب قائم است ، در تعیین مجانب افقی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{|x|}{x-1}\ \lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{x}{x-1}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{|x|}{x-1}\ \lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{x}{x-1}=\tan^{-1}(-1)=\frac{-\pi}{4}$$

بنابر این تابع دارای دو خط مجانب افقی $y=\frac{-\pi}{4}\ ,\ y=\frac{\pi}{4}$ است .

۸۰. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x\sqrt{x^{۲}-۱}+\tan^{-۱}\sqrt{x}}{x^{۲}-۱}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا دامنه ی تعریف تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \to x\geq 1 \\ \tan^{-1}\sqrt{x} \to x\geq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(1,+\infty)$$

بنابر این از ریشه های مخرج فقط x =۱ خط مجانب قائم است ، در تعیین مجانب افقی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2-1}+\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x|x|+\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^2-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\to y=1$$

پس تابع یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

۸۱. مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=۲$ به صورت $\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^{۲}+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۳»

حد فوق یک ابهام از نوع $\frac{0}{0}$ است ، پس با استفاده از قاعده ی هوپیتال خواهیم داشت :

$$HOP\lim_{h\to 0}\frac{2\times 2(2+h)+k}{1}=8+k$$

$$\Rightarrow 8+k=12\Rightarrow k=4$$

۸۲. مشتق راست تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{\sqrt{(x+۲)^۲(x+۳)}}{۲x+\sqrt{x+۶}}$ در $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x+2)^2(x+3)}}{2x+\sqrt{x+6}}=\frac{|x+2|\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}$$

لذا:

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\frac{|x+2|\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}-0}{x+2}$$

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x+2|}{|x+2|}\times\frac{\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}$$

وقتی $x>-2$، $|x+2|=x+2$ پس :

$$f'_+(-2)=1\times\frac{\sqrt{-2+3}}{-4+\sqrt{4}}=\frac{-1}{2}$$

۸۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|.[x]$ ، مقدار $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۳»

تابع در x=۰ پیوسته است ، پس :

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|[x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)(-1)}{x}=1$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|[x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\times0}{x}=0$$

بنابر این : $f'_-(0)-f'_+(0)=1-0=1$

۸۴. مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج رادیکال صورت ضرب می کنیم :

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-1+-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{(1-x^2)^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۸۵. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x=5$ و $x=9$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\sqrt{x^2+144}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(9)-f(5)}{9-5}$$ = آهنگ متوسط تغییر -2 $2+h$

$$=\frac{\sqrt{81+144}-\sqrt{25+144}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{225}-\sqrt{169}}{4}=\frac{15-13}{4}=\frac{1}{2}=0/5$$

۸۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[۲/۲۵,۲/۵۶]$ از آهنگ آنی، در شروع این بازه چقدر کم‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$*=\frac{f(2/56)-f(2/25)}{2/56-2/25}=\frac{\sqrt{2/56}-\sqrt{2/25}}{0/31}$$

$$=\frac{1/6-1/5}{0/31}=\frac{10}{31}$$

آهنگ لحظه ای در $x=2/25$ $\quad =f'(2/25)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=2/25}$

$$=\frac{1}{2\times 1/5}=\frac{1}{3}$$

بنابر این : $=\frac{1}{3}-\frac{10}{31}=\frac{1}{93}$

۸۷. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x-۱|+a|x-۱|$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=۱$ ۲) $a=۰$ ۳) $a=-۱$ ۴) همه مقادیر

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$f(x)=x|x-1|+a|x-1|=(x+a)|x-1|$$

بنابر این : $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+a)|x-1|}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}(x+a)$$

از آنجایی که $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ وجود ندارد ، پس برای آنکه $f'(1)$ موجود باشد ، باید عامل (x + a) به ازای x =۱ صفر شود تا حد موجود باشد ، لذا :

$$x+a\Big|_{x=1}=0\to 1+a=0\to a=-1$$

۸۸. مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x-1).\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{40}$ ۴) $\frac{5}{16}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}=\frac{1}{16}$$

۸۹. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x-1}+x\sqrt{2x}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\underbrace{x^2-1\sqrt[3]{x-1}}_{g(x)}+\underbrace{x\sqrt{2x}}_{h(x)}$$

تابع از مجموع دو تابع g و h تشکیل شده ، اما مشتق تابع g در x =۱ صفر است ، زیرا :

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\sqrt[3]{x-1}=0$$

و در تابع h با استفاده از مشتق گیری داریم :

$$h(x)=x\sqrt{2x}\Rightarrow h'(x)=\sqrt{2x}+x\times\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$h'(1)=\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f'(x)=h'(1)+g'(1)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+0$$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۹۰. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin(2x-\pi)\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $2\pi^2$ ۲) π^2 ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱» : عامل صفر شونده $\sin(2x-\pi)$ است ، فقط از آن مشتق می گیریم :

$$y'=2\cos(2x-\pi)\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 0\times\pi^2=2\pi^2$$

۹۱. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax & x>۴ \\ ۴\sqrt{x}+b & ۰\le x\le ۴ \end{cases}$ در $x=۴$ مشتق پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۷- ۲) ۱۳- ۳) ۱۳ ۴) ۲۷

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\begin{cases} x^{2}+ax & , x>4 \\ 4\sqrt{x}+b & , 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)\Rightarrow 4\sqrt{4}+b=4^2+4a$$

$$\Rightarrow b-4a=8 \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & , x>4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}} & , 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$f'(4)=f'_-(4)\Rightarrow 8+a=\frac{2}{\sqrt{4}}\Rightarrow a=-7$$

$$b-4a=8\xrightarrow{a=-7}b=-20$$

$$\to a+b=-7+(-20)=-27$$

۹۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax-a & x<۱ \\ x^{۲}-x & x\ge ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\begin{cases} ax-a & , x<1 \\ x^{2}-x & , x\ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a-a=1-1$$

تابع به ازای هر a ، x =۱ پیوسته است .

$$f'(x)=\begin{cases} a & , x<1 \\ 2x-1 & , x\ge 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2-1\Rightarrow a=1$$

۹۳. تابع با ضابطه‌ی $y=\left(x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b\right)[x]$ در $x=۲$ مشتق پذیر است، $a+b$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۲- ۳) ۴- ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۴» : در همسایگی ۲= x ، تابع را باز نویسی می کنیم .

$$y=\begin{cases} x^{3}+3x^{2}+ax+b & 1\le x<2 \\ 2\left(x^{3}+3x^{2}+ax+b\right) & 2\le x<3 \end{cases}$$

برای اینکه تابع در ۲= x مشتق پذیر باشد باید در این نقطه پیوسته باشد و $f'_{-}(2)=f'_{+}(2)$ ، بنابر این :

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x)=\lim_{x\to 2^{+}} f(x)=f(2)$$

: شرط پیوستگی

$$\Rightarrow 8+12+2a+b=2(8+12+2a+b)$$
$$\Rightarrow 8+12+2a+b=0\Rightarrow 2a+b=-20 \quad (*)$$

: شرط برابری مشتق های چپ و راست

$$y'=\begin{cases} 3x^{2}+6x+a & , 1<x<2 \\ 2\left(3x^{2}+6x+a\right) & , 2<x<3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_{-}(2)=12+12+a=24+a \\ f'_{+}(2)=2(12+12+a)=48+2a \end{cases}$$
$$\xrightarrow{f'_{-}(2)=f'_{+}(2)} 24+a=48+2a\Rightarrow a=-24$$
$$\xrightarrow{*} b=28\Rightarrow a+b=4$$

۹۴. مماس‌های رسم شده بر منحنی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ x^{۲} & x<۰\end{cases}$ در مبدأ مختصات، با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x^{2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}x=0$$

بنابر این زاویه ی بین دو مماس 90° است.

۹۵. تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt[۵]{(x-۱)^۳}+۱$ در $x=۱$.

۱)خط مماس دارد ولی مشتق ندارد.
۲) خط مماس و مشتق دارد.
۳) خط مماس و مشتق ندارد.
۴) مشتق دارد خط مماس ندارد.

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^3}+1$$

تابع f در x =۱ پیوسته است ، اما :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}=+\infty$$

پس در x =۱ مشتق ندارد، اما از آنجایی که تابع در x =۱ پیوسته است . پس در x =۱ خط مماس دارد.

۹۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(x-۱)(x+۱)^۳} & , x\geq ۰\\ \left|(x+۱)(x+۲)^۲\right| & , x<۰\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ : گزینه ی «۲»

تابع را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)\sqrt[3]{x-1} & , x\geq 0\\ \left|(x+1)(x+2)^2\right| & , x<0\end{cases}$$

هر دو ضابطه ی تابع روی دامنه ی خود پیوسته اند، تابع ضابطه ی بالا در x =۱ (ریشه ی ساده ی زیر رادیکال فرجه ی فرد) مشتق ناپذیر است و تابع ضابطه ی پایین در x = -۱ (ریشه ی ساده ی داخل قدر مطلق) مشتق ناپذیر است ، در مرز ناحیه یعنی در x =۰ داریم :

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\sqrt[3]{x-1}=-1=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left|(x+1)(x+2)^2\right|=4$$

پس تابع در x =۰ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است ، لذا تابع در سه نقطه ی ۱ ، ۱- ، ۰ مشتق ناپذیر است .

۹۷. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}} \to y=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow y'(4)=\frac{-1}{2\sqrt{4^3}}=\frac{-1}{2\sqrt{64}}=\frac{-1}{16}$$

۹۸. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$ ، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰/۲- ۲) ۰/۱- ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

پاسخ : گزینه ی «۳» : با استفاده از فرمول های

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ و } \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

داریم :

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}$$

$$f(x)=\frac{\frac{3+2}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} \Rightarrow f'(2)=\frac{\frac{5}{5^2}}{2\sqrt{\frac{5}{5}}}=\frac{\frac{1}{5}}{2}=\frac{1}{10}$$

۹۹. اگر $f(x)=(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(-۱+\Delta x)-f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : حد داده شده ، مشتق تابع در $x=-۱$ است، پس باید $f'(-1)$ را بیابیم ، با استفاده از فرمول مشتق $(uv)'$ داریم :

$$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+(x-2)\times\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2}+(-1-2)\times\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=1+2=3$$

۱۰۰. مشتق عبارت $\left(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)^{۲}$ به ازای $x=-۸$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول های $\left(u^{n}\right)'=nu'u^{n-1}$ و $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ داریم :

$$f(x)=\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^{2}}\right)^{2}$$

$$f'(x)=2\left(\frac{-16}{x^{2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^{2}}\right)^{1}$$

$$f'(-8)=2\left(\frac{-16}{64}-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}\right)\left(\frac{16}{-8}-\sqrt[3]{64}\right)$$

$$f'(-8)=2\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}\right)(-2-4)=2\left(\frac{1}{12}\right)(-6)=-1$$

۱۰۱. مقدار مشتق $y=\cos^{۲}\frac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)^{2}\Rightarrow y'=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)'\times\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

$$y'=\left(\frac{\pi}{3x}\right)'\left(-\sin\frac{\pi}{3x}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\pi}{3x^{2}}\left(-2\sin\frac{\pi}{3x}\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

با توجه به اتحاد $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ ، می توان نوشت :

$$\Rightarrow y'=\frac{\pi}{3x^{2}}\sin\frac{2\pi}{3x}$$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{\pi}{3(4)^{2}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{48}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{96}$$

۱۰۲. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^{۶}x+\cos^{۳}x+\cot x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۴»

با استفاده از فرمول $\left(u^{n}\right)'=nu'u^{n-1}$ داریم :

$$y=\sin^{6}x+\cos^{3}x+\cot x$$
$$y'=6\cos x.\sin^{5}x-3\sin x.\cos^{2}x-\left(1+\cot^{2}x\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-0-(1+0)=-1$$

۱۰۳. اگر $f(x)=\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin^{۲}x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۴}\right)-۳f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۳»

با استفاده از اتحاد $\cos^{2}x=1-\sin^{2}x$ داریم :

$$f(x)=\frac{-\sin^{2}x+1}{\sin^{2}x+1}$$

با استفاده از فرمول $\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^{2}}\times u'$ داریم :

$$f'(x)=\frac{-1-1}{\left(1+\sin^{2}x\right)^{2}}(2\sin x\cos x)=\frac{-4\sin x\cos x}{\left(1+\sin^{2}x\right)^{2}}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\left(1+\sin^{2}\frac{\pi}{4}\right)^{2}}=\frac{-2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}}=\frac{-8}{9}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sin^{2}\frac{\pi}{4}+1}{\sin^{2}\frac{\pi}{4}+1}=\frac{1}{3}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}-3\times\frac{-8}{9}=3$$

۱۰۴. اگر $f(x)=\sqrt{2\sin \pi x^2}$ آنگاه $f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\pi\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول های $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و $(\sin u)'=u'\cos u$ داریم :

$$f(x)\sqrt{2\sin \pi x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(2\sin \pi x^2\right)'}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{2\times 2\pi x\ \cos \pi x^2}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{2\sin\frac{\pi}{6}}}=\frac{4\pi\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{1}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۵. اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x^3+x+1$ باشد، آنگاه $(gof)'(0)$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$(gof)'(0)\times g'(f(0))$$

اما $f(x)=\sqrt{x+1}$ پس $f(0)=1$:

$$=f'(0)\times g'(1)$$

باید $f'(0)$ و $g'(1)$ را بیابیم :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=3x^2+1\Rightarrow g'(1)=4$$

بنابر این :

$$(gof)'(0)\times g'(1)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

۱۰۶. اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin \pi x$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع gof در نقطه‌ی تلاقی آن با محور xها، روی بازه‌ی $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $\frac{-\pi}{2}$ ۳) π ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

ابتدا تابع gof را تشکیل می دهیم .

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\cos x)=\sin(\pi\cos x)$$
$$\Rightarrow (gof)(x)=\sin(\pi\cos x)$$

در تلاقی با محور x ها ، y=۰ است ، پس باید :

$$\sin(\pi\cos x)=0 \Rightarrow \pi\cos x=k\pi \Rightarrow \cos x=k$$

اما $-1\le \cos x\le 1$ ، لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۰ ، ۱ ، ۱- ، که در بازه ی $(0,\pi)$ ، تنها k=۰ یعنی cos x=۰ حاصل می شود و از آنجا $x=\frac{\pi}{2}$ ، پس کافی است مشتق تابع را در $\frac{\pi}{2}$ بیابیم .

$$(gof)'(x)=(-\pi\sin x)\cos(\pi\cos x)$$
$$(gof)'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-\pi)\cos(0)=-\pi$$

۱۰۷. اگر $h(0)=2h'(0)=-g(1)=-g'(1)=f'(-1)=1$ مقدار مشتق تابع fogoh در صفر کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : از آنجایی که $(fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$ ، پس :

$$(fogoh)'(x)=(f(g(h(x))))'=(g(h(x)))'f'(g(h(x)))$$
$$=h'(x)\times g'(h(x))\times f'(g(h(x)))$$

در x=۰ ، خواهیم داشت : $=h'(0)\times g'(h(0))\times f'(g(h(0)))$

اما h(۰)=۱ ، پس : $=h'(0)\times g'(1)\times f'(g(1))$

و g(۱)=۱- ، پس :

$$=h'(0)\times g'(1)\times f'(-1)\times 1=\frac{-1}{2}$$

۱۰۸. مشتق $f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۲ـ است، شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول $(f(u))'=u'f'(u)$ داریم :

با فرض $g(x)=f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ ، طبق فرض مسأله $g'(1)=-2$ است ، پس :

$$g'(x)=\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$$

$$g'(1)=\frac{6}{3\sqrt[3]{8^2}}f'(2)\Rightarrow\frac{1}{2}f'(2)=-2\Rightarrow f'(2)=-4$$

شیب خط مماس در ۲= x ، ۴- است ، پس شیب خط قائم $\frac{1}{4}$ است.

۱۰۹. اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ کدام است؟

۱) ۱ـ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳» : با استفاده از فرمول $(f(u))'=u'f'(u)$ داریم :

$$y=f(xf(x))\Rightarrow y'=(f(x)+xf'(x))f'(xf(x))$$
$$y'(2)=(f(2)+2f'(2))f'(2f(2))$$

اما $f(x)=\frac{3}{2}-\sqrt{x+2}$ است ، پس $f(2)=\frac{-1}{2}$ و :

$$f'(x)=0-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\Rightarrow f'(2)=\frac{-1}{4}$$

پس :

$$y'(2)=\left(\frac{-1}{2}+2\left(\frac{-1}{4}\right)\right)f'\left(2\times\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow y'(2)=-f'(-1)$$

باید $f'(-1)$ را بیابیم :

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+2}}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-1}{2}$$

پس : $y'(2)=-1\times\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

۱۱۰. اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\frac{۱}{۳}$ مشتق $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در نقطه‌ی $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

حد داده شده ، مشتق تابع در x =۲ است ، پس $f'(2)=\frac{-1}{3}$ ، از طرفی در همسایگی x = -۱ ، $|x|=-x$ پس باید مشتق $f\left(\sqrt{3-x}\right)$ را در x = -۱ بیابیم ، لذا :

$$y=f\left(\sqrt{3-x}\right)\to y'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}f'\left(\sqrt{3-x}\right)$$

$$y'(-1)=\frac{-1}{2\sqrt{3+1}}f'(2)=\frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

۱۱۱. اگر f یک تابع زوج، $f'_+(۱)=۱$ و $f'_-(۱)=۲$ آنگاه $f'_+(-۱)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۱»

می دانیم تابع زوج نسبت به محور y ها تقارن دارد و شیب خطوط مماس در نقاط متقارن نسبت به محور y ها قرینه ی هم است . لذا با توجه به شکل فرضی ، می توانیم شیب ها را بیابیم .

با توجه به شکل :

$$f'_+(1)=-f'_-(-1)\quad(1)$$

$$f'_-(1)=-f'_+(-1)\quad(2)$$

$$=f'_+(-1)=-f'_-(-1)=-2$$

۱۱۲. تابع f زوج است، اگر خط به معادله‌ی $y=۲x-۳$ مماس بر نمودار در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن باشد، آنگاه معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ـ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y-۲x-۱=۰$ ۲) $۲y-x+۱=۰$ ۳) $y+۲x+۱=۰$ ۴) $۲y+x+۳=۰$

پاسخ : گزینه ی «۲»

نقطه به طول (۱) روی خط مماس است پس :

$$y=2-3=-1\rightarrow A(1,-1)$$

f تابعی زوج است ، پس نقطه ی به طول (۱-) به عرض -۱ خواهد بود ، بنابر این (۱- و-۱) A' ، از طرفی ، معادله ی خط مماس در ۱ ، y = ۲ x -۳ است ، پس :

$$f'(1)=2$$

اما f زوج است ، پس :

$$f(x)=f(-x)$$
$$\rightarrow f'(x)=-f'(x)\xrightarrow{x=1}f'(1)=-f'(-1)$$

بنابر این $f'(-1)=-f'(-1)$ ، لذا شیب خط مماس بر تابع f در نقطه ی به طول (۱-) ، ۲- است ، در نتیجه شیب خط قائم بر تابع در نقطه ی $A'(-1,-1)$ برابر $\frac{1}{2}$ است ، بنابر این :

$$y=(-1)=\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y+2=x+1\Rightarrow 2y-x+1=0$$

۱۱۳. اگر $y=\tan^{۲}(\pi u)$ و $u=x+\sqrt{x}$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) -۸π ۲) -۴π ۳) ۴π ۴) ۸π

پاسخ : گزینه ی «۱» : با استفاده از مشتق زنجیری داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$
$$=2\pi\left(1+\tan^2\pi u\right)\tan\pi u\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

اما به ازای $x=\frac{1}{4}$ در $u=x+\sqrt{x}$ ، $u=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ ، پس :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=\frac{1}{4}\\ u=\frac{3}{4}}}=2\pi\left(1+\tan^2\frac{3\pi}{4}\right)\tan\frac{3\pi}{4}\times(1+1)$$
$$=2\pi(1+1)(-1)\times 2-8\pi$$

۱۱۴. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=|x|+|x^{۲}-۲x|$ در $x=-۱$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۳- ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : در همسایگی $x=-۱$ ، $x^{2}-۲x>۰$ ، پس $|x^{2}-2x|=x^{2}-2x$ و $|x|=-x$ است ، پس قدر مطلق ها را با علامت مناسب بر می داریم و سپس مشتق می گیریم :

$$y=-x+x^{2}-2x \rightarrow y'=x^{2}-3x$$
$$y'=2x-3 \Rightarrow y'(-1)=-2-3=-5$$

۱۱۵. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=|x(x-۱)|+|(x-۱)(x-۲)|+...|(x-۴)(x-۵)|$ در $x=\frac{۳}{۲}$ چقدر است؟

۱) ۲۰- ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰-

پاسخ : گزینه ی «۴» : باید در همسایگی $x=\frac{3}{2}$ قدر مطلق را با علامت مناسب برداریم ، با قرار دادن $x=\frac{3}{2}$ در عبارت ، تنها $(x-1)(x-2)$ منفی است و بقیه به ازای $x=\frac{3}{2}$ مثبت هستند ، پس ، تنها قدر مطلق دوم را با علامت منفی بر می داریم :

$$y=x(x-1)-(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)$$
$$+(x-3)(x-4)+(x-4)(x-5)$$

با مشتق گیری داریم :

$$y'(x)=(2x-1)-(2x-3)+(2x-5)+(2x-7)+(2x-9)$$
$$y'\left(\frac{3}{2}\right)=2-0-2-4-6=-10$$

۱۱۶. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x\sqrt{x+۵}+\sqrt{x}(x+۵)}{\sqrt{x^{۲}+۵x}}$ در $x=۴$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^{2}+5x}}$$
$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{x^{2}+5x}}$$
$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$
$$\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2(2)}+\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

۱۱۷. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۲}{x+۲}$ در $x=-۱$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{-۱}{۲}$ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\frac{x^{3}+3x^{2}+3x+2}{x+2}=\frac{\left(x^{3}+3x^{2}+3x+1\right)+1}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)^{3}+1}{x+2}=\underbrace{\frac{(x+1)^{3}}{x+2}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{h(x)}$$

مشتق تابع g در ۱- = x صفر است ، زیرا :

$$g'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{2}}{x+2}=0$$

و در h (x) داریم :

$$h(x)=\frac{1}{x+2}\Rightarrow h'(x)=\frac{-1}{(x+2)^{2}}\Rightarrow h'(-1)=-1$$

پس :

$$f'(-1)=g'(-1)+h'(-1)=0-1=-1$$

۱۱۸. مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x\cos x\cos ۲x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۲۴}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

با استفاده از اتحاد $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$ داریم :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\cos 2x)=\frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)=\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$f'(x)=\cos 4x\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۹. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=(\sin x+\cos x)^{۴}-۲\sin ۲x$ در $x=\frac{۳\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$ داریم :

$$f(x)=\left((\sin x+\cos x)^2\right)^2-2\sin 2x$$
$$=(1+\sin 2x)^2-2\sin 2x$$
$$=(1+2\sin 2x\,2x)-2\sin 2x=1+\sin^2 2x$$
$$f'(x)=2(2)\sin 2x\cos 2x=2x=2\sin 4x$$
$$f'\left(\frac{3\pi}{16}\right)=2\sin\frac{3\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

۱۲۰. اندازه‌ی مشتق تابع به معادله‌ی $y=\frac{۱-\tan ۲x}{۱+\tan ۲x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ ، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $\frac{1-\tan a}{1+\tan a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$ داریم :

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Rightarrow y'=-2\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\left(1+\tan^2 0\right)=-2$$

۱۲۱. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin ۲x\tan x+\frac{۳x}{x^{۲}-۱}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۳

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\sin 2x\tan x+\frac{3x}{x^2-1}$$
$$f'(x)=(2\cos 2x)\tan x+\left(1+\tan^2 x\right)\sin 2x$$
$$+\frac{3\left(x^2-1\right)-2x\times 3x}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$f'(0)=0+0+\frac{-3-0}{1}=-3$$

۱۲۲. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۱}\right)^{۳}\left(\sqrt{x+۴}+\sqrt{x+۱}\right)^{۲}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۲۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$y=\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)^{3}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)^{2}$$
$$y=\left(\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)^{2}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)^{2}\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$=\left(\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)\right)^{2}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$=\left(\left(x+4-x-1\right)^{2}\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$y=9\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$y'=9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow y'(0)=9\left(\frac{1}{2\times 2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y'(0)=\frac{-9}{4}$$

۱۲۳. اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\frac{x^{۲}+\sin^{۲}x+۲x\sin x}{x+۱}$ آنگاه $۲ff'g+g'f^{۲}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۲»

عبارت $2ff'g+g'f^{2}$ ، مشتق تابع $f^{2}g$ است پس کافی است تابع $f^{2}g$ را بیابیم:

$$f^{2}(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}\right)^{2}=\frac{x}{(x+\sin x)^{2}}$$
$$g(x)\frac{x^{2}+\sin^{2}x+2x\sin x}{x+1}=\frac{(x+\sin x)^{2}}{x+1}$$
$$(f^{2}g)(x)=\frac{x}{(x+\sin x)^{2}}\times\frac{(x+\sin x)^{2}}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

با مشتق گیری از دو طرف داریم :

$$(f^{2}g)'(x)=\frac{1}{(x+1)^{2}}\Rightarrow(f^{2}g)'(1)=\frac{1}{(1+1)^{2}}=\frac{1}{4}$$

۱۲۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\sin x & x\geq ۰ \\ ax^n & x<۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق مرتبه‌ی سوم دارد a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : تابع در x =۰ مشتق مرتبه ی سوم دارد ، پس

هر دو موجود : $f_-^{(3)}(0)=f_+^{(3)}(0)$ لذا :

$$f(x)=\begin{cases} x-\sin x & , x\geq 0 \\ ax^n & , x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\cos x & , x\geq 0 \\ ax^{n-1} & , x<0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} \sin x & , x\geq 0 \\ an(n-1)x^{n-2} & , x<0 \end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases} \cos x & , x\geq 0 \\ an(n-1)(n-2)x^{n-3} & , x<0 \end{cases}$$

باید حد تابع مشتق سوم در x =۰ موجود باشد ، بنابر این لازم است n =۳ باشد ، لذا:

$f_+^{(3)}(0)=1$ و $f_-^{(3)}(0)=an(n-1)(n-2)$

$f_-^{(3)}(0)=a\times 3\times 1=6a$

از آنجایی که مشتق سوم در x =۰ وجود دارد ، باید :

$f_+^{(3)}(0)=f_-^{(3)}(0)\Rightarrow 1=6a\Rightarrow a=\frac{1}{6}$

۱۲۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ مفروض است. اگر مشتق سوم این تابع در صفر موجود باشد، کدام رابطه بین دو عدد مثبت m و n برقرار است؟

۱) $x>۳m$ ۲) $m>۳n$ ۳) $n>m+۳$ ۴) $m>n+۳$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با فرض $\frac{m}{n}=r$ ، تابع با ضابطه ی $f(x)=x^r$ را داریم ، از این تابع سه بار مشتق می گیریم :

$f'(x)=rx^{2-1}\Rightarrow f''(x)=r(r-1)x^{r-2}$

$f'''(x)=r(r-1)(r-2)x^{r-3}$

برای آنکه $f'''(0)$ موجود باشد ، باید $r-3>0$ باشد ، لذا $\frac{m}{n}-3>0$ یا $m>3n$.

۱۲۶. اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{h}{f'(۱-h)-f'(۱+h)}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f'(1-h)-f'(1+h)}=\frac{0}{0}$$

تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ در ۱= x از هر مرتبه ای مشتق دارد، پس برای رفع ابهام با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{h\to 0}\frac{1}{-f''(1-h)-f''(1-h)}=\frac{-1}{2f''(1)}$$

لذا کافی است (۱) f'' را بیابیم .

$$f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4}(x+3)^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{4\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(1+3)^3}}=\frac{-1}{4\times 8}=\frac{-1}{32}$$

بنابر این حاصل حد خواسته شده برابر است با :

$$\text{حد}=\frac{-1}{2f''(1)}=\frac{-1}{2\times\frac{-1}{32}}=16$$

۱۲۷. اگر $y=\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x$ حاصل $\dfrac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\cos\sqrt{2}x+\sin\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y'=-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x+\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y''=-2\cos\sqrt{2}x-2\sin\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y''=-2\left(\cos\sqrt{2}x+\sin\sqrt{2}x\right)$$

$$\Rightarrow y''=-2y\Rightarrow\frac{y''}{y}=-2$$

۱۲۸. اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{(x+۳)^۳}{x+۱}$ باشد حاصل $f''g+g'f'$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ : گزینه ی «۳» : عبارت $f''g+g'f'$ ، مشتق عبارت $(f'g)$ است بنابر این :

$$f''g+g'f'=(f'g)'$$

کافی است توابع f' و g را در هم ضرب کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم :

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+3)^2}$$
$$(f'g)(x)=\frac{-1}{(x+3)^2}\times\frac{(x+3)^3}{x+1}=\frac{x+3}{x+1}$$
$$\Rightarrow (f'g)'(x)=-\frac{1-3}{(x+1)^2}\Rightarrow (f'g)'(1)=-\frac{-2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

۱۲۹. مشتق مرتبه‌ی چهردهم $y=\left(x^۲+x\right)^۷+x^{۱۴}$ کدام است؟

۱) $۱۴!$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲(۱۴!)$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$y=\left(x^2+x\right)^7+x^{14}$$

از آنجایی که مشتق مرتبه ی چهاردهم را می خواهیم ، پس جمله هایی که درجه ی آنها کمتر از ۱۴ باشد ، مشتق مرتبه ی چهاردهم آنها صفر است لذا :

$$y=2x^{14}+g(x)\Rightarrow y^{(14)}=2\times 14!+0=2(14!)$$

۱۳۰. مشتق چهارم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(x^۲+۱\right)\left(x^۲+۲\right)\left(x^۲+۳\right)$ در $x=۰$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۶ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$y=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)$$
$$y=\left(x^4+3x^2+2\right)\left(x^2+3\right)$$
$$y=x^6+6x^4+11x^2+6$$
$$y^{(4)}=6\times 5\times 4\times 3x^2+6\times 4!+0+0$$
$$y^{(4)}(4)=6\times 4!=6\times 24=144$$

۱۳۱. مشتق پنجم تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{۲}{x^{۳}}$ در $x=-۱$ کدام است؟

۱) $۲\times ۵!$ ۲) $-(۷!)$ ۳) $-۲\times ۵!$ ۴) $۷!$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$y=\frac{2}{x^{3}}=2x^{-3}$$
$$y^{(1)}=2(-3)x^{-4}$$
$$y^{(2)}=2(3\times 4)x^{-5}$$
$$y^{(3)}=2(-3\times 4\times 5)x^{-6}$$
$$y^{(4)}=2(3\times 4\times 5\times 6)x^{-7}$$
$$y^{(5)}=2(-3\times 4\times 5\times 6\times 7)x^{-8}$$
$$y^{(5)}=-(2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7)x^{-8}$$
$$y^{(5)}=-(7!)x^{-8}\Rightarrow y^{(5)}(-1)=-(7!)$$

۱۳۲. اگر $y=\sin x+\cos x$ مشتق نهم تابع را با $y_{۹}$ نمایش دهیم حاصل $(y_{۹})^{۲}+y^{۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sin ۲x$ ۲) ۲ ۳) $-۲\sin ۲x$ ۴) $۲+\sin ۲x$

پاسخ : گزینه ی «۲»

توابع sin و cos پس از هر چهار بار مشتق گیری تکرار می شوند ،لذا

$$y^{(9)}=y^{(1)}=\cos x-\sin x$$

پس :

$$\left(y^{(9)}\right)^{2}+y^{2}=(\cos x-\sin x)^{2}+(\cos x+\sin x)^{2}$$
$$=(1-2\sin x\cos x)+(1+2\sin x\cos x)=2$$

۱۳۳. مشتق مرتبه‌ی ششم $y=\frac{۱+\sin ۲x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\sin x-\cos x$ ۲) $\sin x+\cos x$ ۳) $\sin x-\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^{2}$ ، عبارت را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$y=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^{2}}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$$

از آنجایی که توابع sin و cos پس از هر چهار بار تکرار می شوند پس :

$$y^{(6)}=y^{(2)}=-\sin x-\cos x$$

۱۳۴. از رابطه‌ی $y=\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}-y=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\left.\frac{\cos(x-2y)+\frac{1}{2\sqrt{x-y}}-0}{-2\cos(x-2y)-\frac{1}{2\sqrt{x-y}}-1}\right|_{(2,1)}$$

$$=-\frac{\cos 0+\frac{1}{2}}{-2\cos 0-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1+\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{7}$$

۱۳۵. اگر $y^3+y=x$ مقدار y'' در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{32}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با قرار دادن طول نقطه در منحنی ، عرض نقطه را می یابیم .

$$y^3+y=x\xrightarrow{x=2}y^3+y=2\rightarrow y=1$$

پس نقطه ی تماس (۱ و ۲) A است . حال با مشتق گیری داریم :

$$y^3+y-x=0$$

$$y'=\frac{f'_x}{f'_y}=-\left.\frac{-1}{3y^2+1}\right|_{y=1}=\frac{1}{4}$$

$$y'=\frac{1}{3y^2+1}$$

مشتق دوم با استفاده از مشتق $\frac{u}{v}$ به دست می آید :

$$y''=\left.\frac{-6yy'}{(3y^2+1)^2}\right|_{\substack{y=1\\ y'=\frac{1}{4}}}=\frac{-6\left(\frac{1}{4}\right)(1)}{(3=1)^2}=-\frac{3}{32}$$

۱۳۶. اگر $f(x)=x^{۳}+۲x$ مقدار $\left(f^{-۱}\right)'(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$3=x^3+2x \Rightarrow x=1$$

پس:

$$f'(x)=3x^2+2 \Rightarrow f'(1)=3+2=5$$

لذا :

$$\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

۱۳۷. مماس بر منحنی تابع معکوس $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x_{۰}=۲$ واقع بر آن کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۰,۰)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۱,۱)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

طول ۲ روی تابع معکوس ، عرض روی تابع اصلی است که با توجه به ضابطه ها ، باید از ضابطه ی بالا استفاده کنیم ، لذا :

$$x^2+1=2 \rightarrow x^2=1 \xrightarrow{x\geq 0} x=1$$

پس نقطه ی $A(1,2)\in f$ و نقطه ی $A'(2,1)\in f^{-1}$ ، اما :

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x>0 \\ 1 & , \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(1)=2$$

پس :

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underset{\text{مماس معکوس}}{m=\frac{1}{2}}$$

بنابر این معادله ی خط مماس بر تابع معکوس در نقطه ی A' برابر است با :

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

که از نقاط داده شده ، تنها گزینه ی (۲) در آن صدق می کند.

۱۳۸. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

از آنجایی که عرض روی تابع اصلی ۲ است ، پس :

$$2=x+\sqrt{x}\rightarrow x=1$$

لذا نقطه ی $A(1,2)\in f$ و $A'(2,1)\in f^{-1}$ ، پس :

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

پس : $m=\frac{2}{3}$ مماس $(f^{-1})'(2)=\frac{2}{3}\rightarrow f^{-1}$

بنابر این معادله ی خط مماس بر f^{-1} در A' برابر است با :

$$y-1=\frac{2}{3}(x-2)$$

در تلاقی با محور y ها ، x = ۰ است ، پس :

$$y-1=\frac{2}{3}(0-2)\Rightarrow y=\frac{-1}{3}$$

۱۳۹. ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^{-1}\sqrt{2x-1}$ در نقطه‌ی $x=\frac{3}{4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : با استفاده از فرمول $(\sin^{-1}u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ داریم :

$$y=\sin^{-1}\sqrt{2x-1}\Rightarrow y'=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{1-(2x-1)}}$$

$$y'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

۱۴۰. در کدام نقطه از منحنی $y=\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$ مشتق اول و دوم هر دو مثبت هستند؟

۱) $x=-2$ ۲) $x=0$ ۳) $x=2$ ۴) $x=4$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$$

با استفاده از فرمول $\left(\tan^{-1}u\right)'=\frac{u'}{1+u^2}$ داریم :

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\frac{1}{x^2+1},x\neq-1$$

پس :

$$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

به ازای $x=-2$ ، f' و f'' مثبت است .

۱۴۱. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=4x+e^{-2x}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $2y-x=2$ ۲) $2y+x=2$ ۳) $y+2x=1$ ۴) $y-x=1$

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا عرض نقطه را می یابیم :

$$y(0)=4\times0+e^0=0+1=1$$

بنابر این نقطه ی تماس (۱ و ۰) A است ، حال شیب خط مماس را می یابیم :

$$y'=4-2e^{-2x}\Rightarrow y'(0)=4-2e^0=2\Rightarrow m_{\text{مماس}}=2$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{m_{\text{مماس}}}=\frac{-1}{2}$$

بنابر این معادله ی خط قائم برابر است با :

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-0)\Rightarrow 2y-2=-x\Rightarrow 2y+x=2$$

۱۴۲. در تابع $y=\ln(x+\sin x+1)$ خط مماس بر منحنی در $x=0$ کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=-2x$

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا عرض نقطه را می یابیم :

$$y(0)=In(0+0+1)=In1=0$$

پس نقطه ی تماس (۰ و ۰) A است ، بنابر این :

$$y=In(x+\sin x+1)\Rightarrow y'=\frac{1+\cos x}{x+\sin x+1}$$

$$\Rightarrow y'(0)=\frac{1+1}{0+0+1}=2\Rightarrow m_{\text{مماس}}=2$$

بنابر این معادله ی خط مماس در A به صورت زیر است :

$$y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$$

۱۴۳. خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $e^{2y}+\ln x+\frac{y}{x}=1$ در نقطه‌ی $(1,0)$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$e^{2y}+Inx+\frac{y}{x}-1=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{0+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}}{2e^{2y}+0+\frac{1}{x}}\Rightarrow y'(1,0)=\frac{1-0}{2e^0+1}=\frac{-1}{3}$$

$$m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=3$$

بنابر این معادله ی خط قائم در (۰ و ۱) A برابر است با :

$$y-0=3(x-1)$$

در تلاقی با محور y ها ، x = ۰ است ، پس :

$$y=3(0-1)-3$$

۱۴۴. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\ln\left(x^{۲}-y\right)=\sqrt{y+۱}-x$ در نقطه‌ی $(۲,۳)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را که با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : از عبارت مشتق ضمنی گرفته و نقطه را جایگذاری می کنیم تا شیب خط مماس به دست آید :

$$In\left(x^{2}-y\right)=\sqrt{y+1}-x \Rightarrow In\left(x^{2}-y\right)-\sqrt{y+1}+x=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{\frac{2x}{x^{2}-y}+1}{\frac{-1}{x^{2}-y}-\frac{1}{2\sqrt{y+1}}}$$

$$\xrightarrow[y=3]{x=2} m \text{ س } \quad \text{مما} = -\frac{\frac{4}{1}+1}{-\frac{1}{1}-\frac{1}{4}}=-\frac{5}{-\frac{5}{4}}=4$$

معادله ی خط مماس : $\Rightarrow y-3=4(x-2) \Rightarrow y=4x-5$

حال محل برخورد این خط با نیمساز ناحیه ی اول یعنی x = y را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y=4x-5 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 4x-5=x \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

۱۴۵. خط به معادله‌ی $y+x=۰$ قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x+\ln(x-۱)$ است، طول پای قائم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۲» : ضریب زاویه ی خط قائم (۱-) است ، پس :

$$y=\frac{1}{2}x^{2}-2x+In(x-1)$$

$$y'=x-2+\frac{1}{x-1}$$

اگر طول نقطه ی تماس را α بگیریم در نتیجه :

۱- = (m قائم) (m مماس)

$$\left(\alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}\right)(-1)=-1 \Rightarrow \alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}=1$$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha-1}=3 \Rightarrow \frac{\alpha^{2}-\alpha+1}{\alpha-1}=3$$

$$\Rightarrow \alpha^{2}-\alpha+1=3\alpha-3 \Rightarrow \alpha^{2}-4\alpha+4=0$$

$$\Rightarrow (\alpha-2)^{2}=0 \Rightarrow \alpha=2$$

پس طول نقطه ی قائم همان طول نقطه ی تماس یعنی (۲) است .

سوالات آمار و احتمال

۱. داده‌های آماری پیوسته در ۸ طبقه دسته بندی شده‌اند به طوری که آخرین دسته به صورت ۹۲ـ ۸۶ نوشته شده است، کوچکترین این داده‌ها کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۸

پاسخ : گزینه«۳» Min =۹۲-۴۸=۴۴ ۴۸=۹۲-Min R=Max-Min و R=۴۸ R=C×K C=۹۲-۸۶=۶ K=۸

۲. در یک آزمون تحصیلی کمترین نمره ۲۲ و بیشترین نمره ۹۷ و تمام نمرات اعداد صحیح‌اند. اگر آنها را در ۱۵ طبقه دسته بندی کنیم حدود طبقه‌ی وسط کدام است؟

۱) ۶۲−۵۸ ۲) ۶۳−۵۸ ۳) ۶۱−۵۷ ۴) ۶۲−۵۷

پاسخ : گزینه«۴» C=5 R=C×K R=97-22=75 K=15 دسته وسط جدول،دسته هشتم است.

۵۷=[طول دسته ×(۱-۸)] + حد پایین دسته اول = حد پایین دسته هشتم

۳. داده‌های آماری با ماکسیمم ۸۵ و می‌نیمم ۲۳ را در ۷ طبقه دسته بندی کرده‌ایم حدود طبقه چهارم کدام است؟

۱) ۵۷−۴۹ ۲) ۵۸−۴۹ ۳) ۵۸−۵۰ ۴) ۵۹−۵۰

پاسخ : گزینه«۴» در بعضی مواقع ممکن است طول دسته ها عدد اعشاری به دست آید.آنگاه رقم اعشاری را به سمت بالا رند میکنیم.هیچ گاه رقم اعشاری را به سمت پایین رند نکنید چون دراین صورت کل دامنه تغییرات پوشش داده نمی شود.

۴. در یک جدول توزیع داده‌های آماری کوچکترین و بزرگترین داده به ترتیب ۲۴ و ۶۴ هستند. اگر این داده‌ها در ۸ طبقه دسته بندی شده باشند،مرکز دسته پنجم کدام است؟

۱) ۴۶/۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷/۵ ۴) ۴۷

پاسخ : گزینه«۱»

۵. اگر دامنه تغییرات چند داده آماری ۳۰ باشد، طول دسته‌ها را چگونه انتخاب کنیم تا تعداد دسته ها یک واحد از طول دسته‌ها بیشتر باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ : گزینه«۱» غیر قابل قبول C=-6 , C=5 ; (C-5)(C+6)=0 30=C(C+1) K=C+1 ; R=30 ; R=C×K

۶. در یک مجموعه‌ی آماری بزرگترین عدد ۳۰ و کوچکترین عدد ۵ می‌باشد. هرگاه دو عدد ۱۰ و ۳۶ به این مجموعه‌ی آماری افزوده شود، دامنه‌ی تغییرات کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۵ ۳) ۵۱ ۴) ۳۱

پاسخ : گزینه«۴» اگر کوچکترین و بزرگترین داده ۵و۳۰ باشد و دو داده ۱۰و۳۶ را به آنها اضافه کنیم کوچکترین داده همان ۵ می ماند اما بزرگترین داده ۳۶ می شود بنابراین دامنه تغییرات برابر ۳۱=۵-۳۶ می شود.

۷. شعاع قاعده یک مخزن مخروطی شکل $R=۱+E_۱$ و طول ارتفاع آن $h=۲+E_۲$ است. گنجایش این مخزن مخروطی شکل چقدر است؟

۱) $V=۲\pi+E_۱+E_۲$

۲) $V=\frac{۲}{۳}\left(\pi+E_۲+۴E_۱\right)$

۳) $V=\frac{\pi}{۳}\left(۲+E_۲+۴E_۱\right)$

۴) $V=\frac{\pi}{۳}\left(۴+۲E_۱+E_۲\right)$

پاسخ : گزینه«۳» حجم مخروط= × مساحت قاعده× ارتفاع

۸. اگر شعاع یک کره $۱+E$ باشد مساحت آن از چه مدلی پیروی می‌کند؟

۱) $۴\pi\left(۱+۲E\right)$

۲) $\frac{۴}{۳}\pi\left(۱+۲E\right)$

۳) $۴\pi\left(۱+E^۲\right)$

۴) $\frac{\pi}{۴}\left(۱+E\right)$

پاسخ : گزینه«۱» مساحت کره=$4\pi r^2$

۹. نمونه عبارتست از:

۱)بخشی از جامعه که سهل الوصول‌تر است.

۲) بخشی از جامعه که بیان کننده ویژگی‌های اصلی جامعه باشد.

۳) بخشی از جامعه که با آن آشناتر باشیم.

۴) بخشی از جامعه که عناصر آن مستقل از یکدیگرند.

پاسخ : گزینه«۲»

۱۰. .نمونه‌ی تصادفی ساده دارای کدام ویژگی زیر می‌باشد؟

۱)هر یک از اعضاء جامعه امکان حضور در آن را داشته باشند.

۲) هر یک از اعضاء جامعه با ترتیب و نظم خاصی انتخاب شوند.

۳) قبل ازا نتخاب نمونه نتوانیم با اطمینان در مورد حضور یا عدم حضور عده‌ای در نمونه قضاوت کنیم.

۴)موارد ۱و۳

پاسخ : گزینه«۴»

۱۱. در کدام‌یک از جوامع زیر می‌توان نمونه گیری را به صورت تصادفی ساده انجام داد؟

۱)گندم موجود در یک سیلو

۲) مخزن آب آشامیدنی

۳) ماشین‌های یک پارکینگ

۴) موارد ۱ و ۲

پاسخ : گزینه«۳» نمونه گیری تصادفی برای جامعه های شمارش پذیر کاربرد دارد که تنها گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

۱۲. در جمع آوری داده‌ها، کدام روش بهتر است؟

۱)مصاحبه ۲) پرسشنامه ۳) استفاده از داده های از پیش تهیه شده ۴) بستگی به داده دارد

پاسخ : گزینه«۴»

۱۳. در یک جامعه به حجم ۲۰۰ می‌خواهیم به کمک ماشین حساب نمونه‌گیری کنیم اعداد تصادفی ۰/۲۹۱ و ۰/۶۵۰ به دست آمده است چه شماره‌هایی متناظر با این اعداد به ترتیب باید انتخاب شوند؟

۱)۱۳ و ۵/۸ ۲) ۱/۳ و ۵۸ ۳) ۵۹ و ۱۳۰ ۴) ۲۹۱ و ۶۵۰

پاسخ : گزینه«۳» A =۵۸/۲+۱=۵۹ ۰/۲۹۱×۲۰۰=۵۸/۲ B =۰/۶۵۰×۲۰۰=۱۳۰

۱۴. پژوهشگران می‌خواهند ارتباط مصرف روزانه میوه رابا طراوت پوست انسان بررسی کنند. نوع متغیرهای تصادفی این بررسی را تعیین کنید؟

۱)مصرف روزانه میوه ، کیفی ـ طراوت پوست ، کیفی ۲) مصرف روزانه میوه، کمی گسسته ـ طراوت پوست ، کیفی

۳) مصرف روزانه میوه، کیفی ـ طراوت پوست، کمی ۴) مصرف روزانه میوه، کمی پیوسته ـ طراوت پوست، کیفی

پاسخ : گزینه«۴»

۱۵. .در یک جدول دسته بندی داده‌ها مرکز سه دسته متوالی به ترتیب ۶/۸ و ۷/۲ و ۷/۶ و تعداد دسته‌ها برابر ۱۲ است. دامنه تغییرات کدام است؟

۱)۵/۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۷/۲ ۴) ۹/۶

پاسخ : گزینه«۲» تفاضل دو مرکز دسته متوالی برابر با طول دسته است بنابراین C =۷/۶-۷/۲=۰/۴ و K=۱۲ و R=K×C

۱۶. اگر مجموع درصد فراوانی‌های نسبی دسته‌های ماقبل آخر برابر ۹۵ و اندازه جامعه ۴۰ باشد، فراوانی مطلق دسته آخر کدام است؟

۱)۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۲» می دانیم که مجموع درصدهای فراوانی های نسبی همیشه برابر ۱۰۰ است بنابراین: باتوجه به مجموع فراوانی ها، فراوانی مطلق دسته آخر ۲ می باشد.

۵=۹۵-۱۰۰= درصد فراوانی نسبی دسته آخر

۱۷. فراوانی نسبی تصادفات در پنجاه روز در جدول زیر آورده شده است. در چند روز تعداد تصادفات ۳ مورد بوده است؟

تعداد تصادف در یک روز	۰	۱	۲	۳	۴
فراوانی نسبی	۰/۲	۰/۱	۰/۲۵	x	۰/۳۵

۱)۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳

پاسخ : گزینه«۲» مجموع فراوانی های نسبی برابر یک است بنابراین: X=۰/۱ ۰/۹+ X=۱ ۰/۲+۰/۱+۰/۲۵+X +۰/۳۵=۱

مجموع فراوانی های مطلق ۵۰ می باشد.

۱۸. جدول زیر ارقام تصادفی حاصل از ۸۰ بار پرتاب یک تاس است. درصد فراوانی نسبی اعداد ظاهر شده که مضرب ۳ هستند کدام است؟

رقم تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۱۵	۱۷	۱۴	۱۱	۱۱	۱۲

۱) ۳۱/۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۲/۵ ۴) ۳۳

پاسخ : گزینه«۳»

فراوانی نسبی ظاهر شدن اعداد مضرب ۳ = $\frac{\text{فراوانی مطلق ظاهر شدن اعداد مضرب 3}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \frac{12+14}{80} = \frac{26}{80}$

درصد فراوانی نسبی= فراوانی نسبی×۱۰۰ $Pi = \frac{26}{80} \times ۱۰۰ = ۳۲/۵$

۱۹. یک سری از داده‌های آماری را به ۴ دسته تقسیم کرده‌ایم. اگر فراوانی نسبی دسته اول a باشد و فراوانی نسبی هر دسته ۰/۱ از دسته قبل بیشتر باشد، a چقدر است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ : گزینه«۱» می دانیم که مجموع فراوانی های نسبی برابر یک است.

فراوانی نسبی دسته اول =a فروانی نسبی دسته دوم =a+۰/۱

فراوانی نسبی دسته چهارم =a+۰/۳ فراوانی نسبی دسته سوم =a +۰/۲

a+(a+۰/۱)+ (a+۰/۲)+ (a+۰/۳)=۱ a=۰/۱

۲۰. فراوانی تجمعی طبقه‌ای ۳۶ است، کدام مقدار زیر می‌تواند فراوانی تجمعی طبقه‌ی بعد از آن باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۸/۵ ۳) ۳۴ ۴) ۳۲/۵

پاسخ : گزینه«۱» فراوانی تجمعی طبقات بعدی باید از ۳۶ بزرگتر و عدد صحیح باشند.

۲۱. اگر در یک جدول توزیع آماری، فراوانی تجمعی سه طبقه آخر به ترتیب برابر ۱۵ و ۱۵ و ۲۰ باشند، درصد فراوانی نسبی دو طبقه آخر به ترتیب عبارتند از:

۱) ۷۵ و ۱۰۰ ۲) صفر و ۲۵ ۳) ۷۵ و ۲۵ ۴) صفر و ۱۰۰

پاسخ : گزینه«۲» سطر آخر فراوانی تجمعی برابر با تعداد کل داده ها می باشد.

درصد فراوانی نسبی طبقه آخر = $\frac{5}{20} \times ۱۰۰ = ٪۲۵$

فراوانی مطلق طبقه آخر =۲۰-۱۵=۵

درصد فراوانی نسبی طبقه ماقبل آخر = $\frac{0}{20} \times ۱۰۰ = ٪۰$

فراوانی مطلق طبقه ماقبل آخر =۱۵-۱۵=۵

۲۲. در نمودار مستطیلی در چه حالتی مساحت مستطیل ها با یکدیگر مقایسه می شوند؟

۱)وقتی محور عمودی برحسب فراوانی نسبی مدرج شود.
۲)وقتی محور عمودی برحسب فراوانی مطلق مدرج شود.
۳)وقتی طول دسته ها متفاوت باشد.
۴)وقتی متغیر تصادفی مورد بررسی، کمی پیوسته باشد.

پاسخ : گزینه«۳»

۲۳. اگر فراوانی های مطلق، یک هیستوگرام(نمودار مستطیلی) کشیده شده باشد، سطح زیر هیستوگرام برابر با مجموع کدام فراوانی است؟

۱)نسبی ۲)تجمعی نسبی ۳)تجمعی ۴)مطلق

پاسخ : گزینه«۴»

۲۴. مساحت مستطیل ها(هیستوگرام)، وقتی از فراوانی های نسبی استفاده می شود، چقدر است؟

۱)حجم جامعه ۲)۱۰۰ ۳)۳۶۰ ۴)۱

پاسخ : گزینه«۴»

۲۵. اگر نمودار هیستوگرام(مستطیلی) داده های آماری در دست باشد، از به هم پیوستن کدام نقاط، نمودار چندضلعی(چندبر) حاصل می شود؟

۱)گوشه سمت چپ مستطیل ها
۲)گوشه سمت راست مستطیل ها
۳)وسط عرض های فوقانی مستطیل ها
۴) وسط بلندی مستطیل ها

پاسخ : گزینه«۳»

۲۶. نمودار کدامیک از منحنی‌های زیر همواره صعودی است؟

۱)فراوانی نسبی
۲) فراوانی مطلق
۳) فراوانی تجمعی
۴) هیستوگرام (مستطیلی)

پاسخ : گزینه«۳» نمودار فراوانی تجمعی همواره صعودی است.

۲۷. نمودار تجمعیِ یک جدول فراوانی با چهار طبقه به صورت زیر است. کدام طبقه کم‌ترین فراوانی مطلق را دارد؟

۱)۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۱» باتوجه به نمودار داده شده می توان گفت کمترین فراوانی مربوط به طبقه دوم است. چون در این طبقه شیب خط نمودار فراوانی تجمعی از همه طبقات دیگر کمتر است.

۲۸. «چه نموداری» برای نشان دادن توزیع درصدهای انواع هزینه های یک شرکت، مناسب است؟

۱)دایره ای ۲) چندبر فراوانی ۳) مستطیلی ۴) چندبر فراوانی نسبی

پاسخ : گزینه«۱» چون متغیر تصادفی، انواع هزینه های شرکت است، k حالت کیفی، مانند هزینه غذای کارکنان، ایاب و ذهاب کارکنان و... دارد.برای آنکه اطلاعات موجود در داده ها را به سرعت در معرض دید قرار دهیم از نمودار دایره ای استفاده می کنیم.

۲۹. در یک نمودار دایره‌ای که نشان دهنده‌ی سِمت‌های ۴۸ نفر کارمند یک مؤسسه است، زاویه مرکزی مربوط به کارشناسان برابر ۴۵ است، «تعداد آنان» چند نفر است؟

۱)۳ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ : گزینه«۲»

۳۰. در یک نمونه آماری فراوانی نسبی متغیری با فراوانی مطلقِ ۳۰، ۰/۶ می‌باشد زاویه مربوط به نمودار دایره‌ای متغیری با فراوانی ۲۰ چند است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۱۸۲

پاسخ : گزینه«۲» Fi=۰/۶ = فراوانی نسبی fi =۳۰=فراوانی مطلق

تعداد کل داده ها=۵۰=$n = \frac{300}{6}$ $\frac{6}{10} = \frac{30}{n}$ $Fi = \frac{fi}{n}$

حال با داشتن n =۵۰ و fi=۲۰ زاویه مربوط به نمودار دایره ای متغیری با فراوانی ۲۰ به دست می آید.

۳۱. دو گروه از داده‌های $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ و $(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n)$ را در دو نمودار دایره‌ای ترسیم کرده‌ایم کدام گزینه درست است؟

۱)زاویه‌های نمودار اول دو برابر زاویه‌های نمودار دوم است. ۲) زاویه‌های نمودار اول نصف زاویه‌های نمودار دوم است.

۳) زاویه‌های هر دو نمودار یکسان است. ۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه«۳»

۳۲. توزیع گروه‌های خونی تعدادی از افراد به صورت

A	B	AB	O
۲۴	۱۴	۱۰	۱۲

است. درصد مساحت مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره‌ای کدام است؟

۱)۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ : گزینه«۲» توجه: دراین مسئله به جای زاویه، درصد مساحت مربوط به فراوانی یک طبقه را خواسته است.

۳۳. در نمودار دایره‌ای جدول زیر، زاویه‌ی مرکزی دسته به نمایندگی ۱۰، برابر ۷۲° شده چند درصد داده‌ها از ۱۱/۵ کوچکتر می‌باشند؟

دسته‌ها	۲/۵ـ۵/۵	۵/۵ـ۸/۵	۸/۵ـ۱۱/۵	۱۱/۵ـ۱۴/۵
فراوانی‌ها	۸	۱۰	x	۶

۱) ٪۴۵ ۲) ٪۶۰ ۳) ٪۴۰ ۴) ٪۸۰

پاسخ : گزینه«۴» عدد ۱۰ نمانیده دسته ۸.۵ تا ۱۱.۵ میباشد.

۳۴. معدل حدسیِ تعدادی نمره ۱۱ در نظر گرفته شده و تفاوت آن از یکایک نمرات ۵ـ و ۱ـ و ۳ و ۷ گردیده، معدل واقعی نمرات «چه عددی» است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

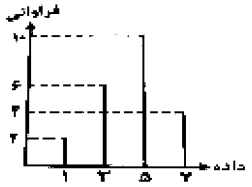
پاسخ : گزینه«۳» اگر a,b,c,d داده های مورد نظر باشند با توجه به اینکه میانگین حدسی برابر ۱۱ می باشد داریم:

$b - ۱۱ = -۵ \rightarrow$ $a - ۱۱ = -۱ \rightarrow a = ۱۰$

$c - ۱۱ = ۳ \rightarrow c = ۱۴$ $d - ۱۱ = ۷ \rightarrow d = ۱۸$

b =۶

۳۵. در نمودارمیله‌ای روبرو میانگین چقدر است؟



۱) ۷/۶۵ ۲) ۶/۷۵ ۳) ۵/۱۲۵ ۴) ۴/۴۵

پاسخ : گزینه«۴» $x=\frac{\sum fx}{n}$

۳۶. اگر میانگین داده های جدول زیر برابر ۴ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته آخر کدام است؟

حدود دسته	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی	۵	۷	۴	x

۱) ۲۴/۱۲
۲) ۲۷/۲۷
۳) ۲۸/۳۲
۴) ۲۹/۰۵

پاسخ : گزینه«۲» با توجه به میانگین داده شده فراوانی دسته آخر را محاسبه می کنیم که عدد ۶ به دست می آید.

درصد فراوانی نسبی دسته آخر $= \frac{6}{22} \times ۱۰۰ = ۲۷/۲۷$

۳۷. میانگین ۵داده آماری برابر ۳۷/۳ ومیانگین ۶داده آماری دیگر برابر۴۵ می باشد.میانگین این ۱۱ داده آماری کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۱/۲۵ ۳) ۴۱/۵ ۴) ۴/۷۵

پاسخ : گزینه«۳» $x= \frac{nx+my}{n+m}$

۳۸. میانگین m داده آماری برابر۵ و میانگین nداده برابر۱۰است.اگر میانگین کل داده ها برابر ۸باشد،n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ : گزینه«۲» $x= \frac{nx+my}{n+m}$ $۸= \frac{5m+10n}{m+n}$ 3m=2n

با توجه به تساوی به دست آمده متوجه می شویم که m باید مضرب ۲ باشد وn باید مضرب ۳ باشد.حال با توجه به گزینه ها متوجه می شویم که فقط عدد۱۸ است که مضرب ۳است.

۳۹. میانگین ۱۰ داده آماری ۳۲/۵ است. اگر دو داده ۳۵ و ۴۰ را از آن داده‌ها کنار بگذاریم، میانگین ۸ داده حاصل کدام است؟

۱) ۳۱/۲۵ ۲) ۳۱/۵ ۳) ۳۱/۷۵ ۴) ۳۲

پاسخ : گزینه«۱» از مجموع داده ها که ۳۲۵=۳۲/۵×۱۰ است دو داده حذف شده ۳۵و۴۰ را کم میکنیم و میانگین ۸ داده جدید را به دست می آوریم

۴۰. میانگین ۳ داده آماری ۱۴ و میانگین همان ۳ داده به اضافه یک داده دیگر برابر ۱۳ شده مقدار داده اخیر کدام است؟

۱) ۱۰.۱ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ : گزینه«۱»

۴۱. میانگین مجموعه‌ی $\{a,b\}$ برابر x و میانگین مجموعه $\{a,b,c,d\}$ برابر y است، میانگین مجموعه $\{c,d\}$ کدام است؟

۱) $x-۲y$ ۲) $۲y-x$ ۳) $x+۲y$ ۴) $۲x-y$

پاسخ : گزینه«۲» a+b=2x , a+b+c+d=4y

c+d= (a+b+c+d) – (a+b) = 4y-2x

۴۲. میانگین نمرات یک دانشجو برابر ۱۵ است، اگر به هر یک از نمرات این دانشجو، به اندازه ۲۰ درصد آن نمره را اضافه نمائیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ : گزینه«۴» با توجه به اینکه ۰/۲=۲۰٪ است داریم:

۱۸= (۱۵) ×۱/۲ = x ۱/۲ = x+ ۰/۲x = x جدید

۴۳. درصورتی که مجموع انحراف داده ها از عدد۵ برابر صفر باشد، میانکین این داده ها کدام است؟

۱)۵- ۲)۲ ۳)۵ ۴)۲۵

پاسخ : گزینه«۳» می دانیم که همواره مجموع انحراف داده ها از میانگین برابر صفر است و چون مجموع انحراف داده ها از عدد ۵ برابر صفر است، پس میانگین نیز برابر ۵ است

۴۴. در یک امتحان ریاضی نمرات ۱۵ نفر به صورت زیر است، میانه این نمرات کدام است؟

۴,۷,۷,۳,۱۲,۱۱,۱۷,۱۵,۱۴,۱۷,۱۹,۱۴,۱۰,۹,۵

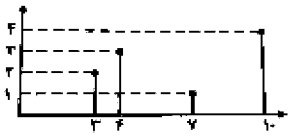
۱)۱۰.۱.۱ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

پاسخ : گزینه«۳» ابتدا داده ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم:

۱۹،۱۷،۱۷،۱۵،۱۴،۱۴،۱۲،۱۱،۱۰،۹،۷،۷،۵،۴،۳

چون تعداد داده ها فرد است بنابراین میانه، داده وسط(داده هشتم) است؛یعنی میانه=۱۱

۴۵. با توجه به نمودار مقابل، میانه کدام است؟



۱)۱۰.۱.۱ ۲) ۶/۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۳» نمودار داده شده متناظر با اعداد ۱۰،۱۰،۱۰،۱۰،۷،۴،۴،۴،۳،۳ است.

۴۶. اگر میانه را از تمام داده‌ها کم کنیم، میانه اعداد حاصل برابر می‌شود با :

۱)صفر ۲) عدد منفی ۳) ۱ـ ۴) ۱

پاسخ : گزینه«۱»

۴۷. به مجموعه‌ی آماری روبرو کدام مقادیر اضافه شوند تا میانه نمونه آماری آن عدد ۴/۵ باشد؟ ۱,۷,۶,۵,۶,۴,۱,۳,۲,۳

۱) ۷ و ۲ ۲) ۵ و ۴ ۳) ۱ و ۸ ۴) ۵ و ۶

پاسخ : گزینه«۴» ابتدا داده ها را مرتب می کنیم.۱،۱،۲،۳،۳۴،۵،۶،۶،۷

تعداد داده ها زوج است باید مقادیری را انتخاب کرد که تعداد ارقام در طرفین اعداد ۴و۵ یکسان باشند یعنی ۴و۵ داده های ششم و هفتم گردند که با توجه به گزینه ها این اعداد فقط می توانند ۵و۶ باشند.

۴۸. چارک سوم اعداد صحیح ۱تا۱۱ برابر است با:

۱)۳ ۲)۸ ۳)۹ ۴)۹/۵

پاسخ : گزینه«۳»

۴۹. در داده های آماری ۳,۵,۳,۳,۸,۹,۵,۳,۱,۲,۵ مجموع میانه و مد چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ : گزینه«۲»

۵۰. میانگین، میانه و مد برای داده های زیر به ترتیب از راست به چپ عبارت است از:

x	۵	۴	۳	۲	۱
f	۶	۴	۵	۷	۸

۱) ۱-۲/۵-۲/۷۶۶ ۲) ۵-۲-۲/۷۶۶

۳) ۱-۲/۵-۲۰ ۴) ۵-۲/۵-۲۰

پاسخ : گزینه«۱»

۵۱. اگر وزن شخصی۵۳kg اندازه گیری شود، کدام یک از گزینه های زیر می تواند خطای اندازه گیری باشد؟

۱) ۱Kg ۲) ۲kg ۳) ۱.۵kg ۴) ۰.۷۵kg

پاسخ : گزینه«۴»

۵۲. اگر وزن دانش آموزی ۵۴.۵ کیلوگرم گزارش شده باشد، کدام مدل ممکن است مورد استفاده قرار گیرد؟

۱) P=E+۵۴/۵ و قدرمطلق Eاز ۰.۵ کمتر ۲) P=E+۵۴ و قدرمطلق Eاز ۰.۵ کمتر

۳) P=E +۵۴/۵ و قدرمطلق Eاز یک کمتر ۴) P=E +۵۴و قدرمطلق Eاز یک کمتر

پاسخ : گزینه«۱»

۵۳. طول و عرض یک مستطیل به صورت $۶+E_۱$ و $۳+E_۲$ اندازه‌گیری شده است. اگر مدلِ مساحت مستطیل به صورت $S=۱۸+E$ باشد، E کدام است؟

۱) $۴E_۱+۲E_۲$ ۲) $۳E_۱+۶E_۲$ ۳) $E_۱+۶E_۲$ ۴) $۲E_۱+E_۲$

پاسخ : گزینه«۲» مساحت مستطیل=طول×عرض! می توان ازEE به دلیل کوچک بودن صرف نظر کرد

۵۴. .در یک استوانه مدل شعاع قاعده $R=۲+E_۱$ و مدل ارتفاع $h=۵+E_۲$ است. در این صورت حجم استوانه از چه مدلی پیروی می‌کند؟

۱) $V=[(۲۰+۴E_۲+۲۰E_۱)$ ۲) $V=\pi(۲۰+۲E_۱+۲۰E_۲)$

۳) $V=\pi(۲۰+۲E_۲+۲۰E_۱)$ ۴) $V=\pi(۴۰+۲۰E_۲+۲E_۱)$

پاسخ : گزینه«۱» حجم استوانه به شعاع R و ارتفاع h از فرمول V=(πR2)×h به دست می آید.می توان از 4EEوE به دلیل کوچک بودن صرف نظر کرد.

۵۵. ششمین عددی که با قرار گرفتن دربین داده های ۶و۵و۴و۳و۲ موجب می شود:میانگین، میانه و مد آنها برابر گردد، چیست؟

۱)۵ ۲)۵ ۳)۴ ۴)۳

پاسخ : گزینه«۳» اگر ششمین عدد xرا در نظر بگیریم باید یکی از اعداد ۶،۵،۴،۳،۲ باشد چون درغیر این صورت اعداد فاقد مد می شوند.بنابراین عدد xمد می شود و چون مد و میانه و میانگین با هم برابرند داریم: $x=\frac{۶+۵+۴+۳+۲+x}{۶} \rightarrow x=۴$

۵۶. پراکندگی یک مجموعه از داده‌ها تنها در چه صورت صفر است؟

۱)همه‌ی اعداد صفر باشند. ۲) اعداد همه منفی باشند.

۳) همه‌ی اعداد مساوی باشند. ۴) اعداد یک در میان مثبت و منفی باشند.

پاسخ : گزینه«۱»

۵۷ دامنه تغییرات $x_۱, x_۲, ..., x_n$ برابر هفت می‌باشد. از کوچکترین داده سه واحد و از بزرگترین داده چهار واحد کاسته شده است، دامنه تغییرات جدید چه قدر است؟

۵(۵۷ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۱» باتوجه به اینکه دامنه تغییرات ۷ می باشد اگر از کوچکترین داده ۳ واحد کم کنیم یعنی ۳- Minو از بزرگترین داده ۴ واحد کم کنیم یعنی ۴- Maxدامنه تغییرات جدید به صورت زیر می شود: (Max-۴) − (Min+۳)=۷-۱=۶ = R جدید

۵۸ اگر دامنه تغییرات داده‌های $۳, a, -۲, ۱۲$ برابر ۱۸ باشد، دامنه تغییرات $a, ۵, ۱۴$ کدام می‌تواند باشد؟

۱)۱۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۱۶

پاسخ : گزینه«۱»

۵۹ در صورتی که واریانس برابر صفر باشد، میانگین و میانه همواره چگونه‌اند؟

۱)با هم مساویند ۲) فقط میانه صفر است. ۳) فقط میانگین صفر است. ۴) میانگین و میانه هر دو صفر است.

پاسخ : گزینه«۱» اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد آنگاه تمام داده ها با هم برابرند.

۶۰ اگر واریانس داده‌های $a, b, c, d, ۳$ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+۲, b+۳, c+۴, d+۵, ۳+۶$ کدام است؟

۱)۱۹ ۲) صفر ۳) صفر ۴) ۷

پاسخ : گزینه«۴» a=b=c=d=3

۶۱ . اگر واریانس داده‌های $x_۱, x_۲, ..., x_n$ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $x_۱ - ۲x_n, x_۲ - ۲x_n, ..., x_n - ۲x_n$ چقدر است؟

۱) x_n ۲) $-x_n$ ۳) صفر ۴) $-۲x_n$

پاسخ : گزینه«۲»

۶۲ . اگر مُدِ صفتی در افراد یک جامعه مثبت باشد و این مقدار مد را از هر یک از داده‌ها کم کنیم:

۱)واریانس افزایش می‌یابد. ۲) واریانس تغییر نمی‌کند.

۳) واریانس کاهش می‌یابد. ۴) واریانس در مقدار مُد ضرب می‌شود.

پاسخ : گزینه«۲»

۶۳ . واریانس اعداد ۱۳۸۰، ۱۳۷۸، ۱۳۷۶، ۱۳۷۴ کدام است؟

۶۳)۵ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲

پاسخ : گزینه«۱» اگر از تمام داده ها یک عدد ثابت کم شود واریانس تغییری نمی کند بنابراین می توانیم از تمام داده های ۱۳۷۴و ۱۳۷۶و ۱۳۷۸و ۱۳۸۰ کوچکترین داده را کم کنیم و واریانس داده های ۰و۲و۴و۶ را محاسبه کنیم.

۶۴ . اگر σ_x^2 واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ باشد، واریانس مشاهدات $\frac{-x_1}{2}+3, \frac{-x_2}{2}+3, \dots, \frac{-x_N}{2}+3$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2$ ۲) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2+3$ ۳) $\frac{1}{4}\sigma_x^2+3$ ۴) $\frac{1}{4}\sigma_x^2$

پاسخ : گزینه«۴» می دانیم که اگر y=ax+b باشد $\sigma_y^2 = a^2\ \sigma_x^2$ می شود

۶۵ . واریانس چیست؟

۱)مجذور متوسط انحراف از میانگین ۲) متوسط مجذور انحرافات از میانگین

۳) متوسط جذر انحرافات از میانگین ۴) مجموع مجذورات انحرافات از میانگین

پاسخ : گزینه«۲»

۶۶ . واریانس مقادیر $-4, -3, 0, 3, 4$ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه«۳»

۶۷ . واریانس کدام یک از مجموعه داده‌های زیر بیشتر است؟

$x_i = 5,5,5,5,5$ $y_i = 5,5,10,5,5$

$z_i = 5,6,7,8,9$ $u_i = 15,15,15,15,15$

۱) u_i ۲) z_i ۳) y_i ۴) x_i

پاسخ : گزینه«۳» با توجه به اینکه داده های xوu یکسان هستند بنابراین $\sigma_u^2 = 0$ و $\sigma_x^2 = 0$

$\sigma_z^2 = 2$ $\sigma_y^2 = 4$

۶۸ .در داده‌های آماری دسته بندی شده‌ی زیر مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۲	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۳	۶	۴	۲	۱

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

پاسخ : گزینه«۳» $\sigma^2 = \frac{\sum f(x-x)^2}{n}$

۶۹ . اگر واریانس داده‌های ۹و۷و۵و۳و۱ برابر K باشد، واریانس داده‌های ۱۹و ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳ کدام است؟

۱) ۴K ۲) ۲K ۳) ۲K+۱ ۴) K+۱

پاسخ : گزینه«۱» اگر هریک از داده های ۱،۳،۵،۷،۹ را دو برابر کنیم و سپس آنها را با یک جمع کنیم داده های ۳،۷،۱۱،۱۵،۱۹ به دست می آید.

۷۰ .در ۵ داده‌ی آماری تفاضل میانگین از داده‌ها به صورت $-۳,-۲,۰,۴,۱$ است، واریانس کدام است؟

۱)۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ : گزینه«۴» $\sigma^2 = \frac{\sum f(x-x)^2}{n}$

۷۱ . واریانس داده‌ها در کدام حالت ۱ است؟

۱)مجموع مربعات انحراف از میانگین برابر فراوانی کل ۲) مجموع انحراف از میانگین برابر فراوانی کل

۳) مجموع مربعات انحرافات از میانگین برابر صفر ۴) مجموع انحراف از میانگین برابر صفر

پاسخ : گزینه«۱»

۷۲ .. انحراف معیار داده‌های $\{۲n-۵ | n \in N , n \le ۵\}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۱\sqrt{۸}$ ۳) $\sqrt{۲/۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ : گزینه«۴»

۷۳ . انحراف معیار ۸ داده آماری برابر ۱/۵ شده است. در این بررسی مقدار $\sum(x_i-\bar{x})^۲$ چقدر بوده است؟

۱)۲۳ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ : گزینه«۲» واریانس این ۸ داده برابر است با ۲/۲۵ =$(۱/۵)^2$ = σ^2

$\sigma^2 = \frac{\sum f(x-x)^2}{n} \rightarrow ۲/۲۵ = \frac{\sum f(x-x)^2}{8} \rightarrow \sum f(x-x)^2 = 18$

۷۴ . انحراف از میانگین‌های ۶ داده آماری عبارتند از «۴ـ و ۲ـ و ۲ـ و ۱ و ۲ و ۵» انحراف معیار آنها چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۶۴}{۹}$

پاسخ : گزینه«۱»

۷۵ . جمع نمرات و جمع مربعات نمرات دانشجویان یک کلاسِ ۲۵ نفری به ترتیب برابر ۴۰۰ و ۶۴۰۰ است. انحراف معیار این دانشجویان چقدر است؟

۷۵) ۱۶ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۳» $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - x^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{۶۴۰۰}{۲۵} - (\frac{۴۰۰}{۲۵})^۲ = ۰$

۷۶ . میانگین داده‌های $x_۱,\dots,x_n$ برابر ۴ و انحراف معیار آنها برابر $\sqrt{۳}$ است. میانگین داده‌های $x_۱^۲,\dots,x_n^۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۷ ۴) ۱۹

پاسخ : گزینه«۴»میانگین داده های داده شده همان $\frac{\sum x^2}{n}$ می باشد بنابراین:

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - x^2 \rightarrow \frac{\sum x^2}{n} = 19$

۷۷ . اگر انحراف معیار $۳z-۱ , y+۴ , ۲x-۵$ ، ۱۱ برابر صفر باشد میانگین x و y و z کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۱۱ ۳) $\frac{۱۹}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

پاسخ : گزینه«۳» 11=3z-1=y+4=2x-5

۷۸ . انحراف معیار $۱۰۱,۱۰۵,۱۰۶,y$ کدام است، در صورتی که بدانیم انحراف معیار $۱,۵,۶$ ، $y-۱۰۰$ برابر با A می‌باشد؟

۱) $۱۰۰A$ ۲) $۱۰۰-A$ ۳) A ۴) $۱۰۰+A$

پاسخ : گزینه«۳» می دانیم که اگر یه عدد ثابت مانند ۱۰۰ به تمام داده ها اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند بنابراین اگر به تمام داده های ۱۰۰-y ، ۱،۵،۶ ۱۰۰ واحد اضافه کنیم داده ها به صورت y، ۱۰۶،۱۰۵،۱۰۱ در می آیند.

۷۹ . واریانس ۶ عدد ۳۶ است. اگر هر عدد را از مجذور میانگین کم و حاصل را بر انحراف معیار تقسیم کنیم مقدار واریانس چه قدر خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۳۶

پاسخ : گزینه«۲» اگر هر داده را از عدد صابت مجذور میانگین کم کنیم واریانس تغییر نمی کند اما اگر العداد به دست آمده را بر انحراف مهیار تقسیم کنیم واریانس جدید به صورت زیر است:

σ^2 جدید $= \sigma^2 \times (\frac{1}{\sigma})^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = ۱$

۸۰ . اگر انحراف معیار داده‌های $x, x, ۳x, ۳x$ برابر ۲ باشد، میانگین داده‌ها چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۴

پاسخ : گزینه«۴»

۸۱ . انحراف معیار داده‌های آماری در کدام حالت ۱ است؟

۱)مجموع انحراف ازمیانگین برابر صفر ۲) مجموع انحراف از میانگین برابر فراوانی کل

۳) مجموع مربعات انحراف از میانگین برابر صفر ۴) مجموع مربعات انحراف از میانگین برابر فراوانی کل

پاسخ : گزینه«۴»

۸۲ .. میانگین ۲۰ داده آماری ۱۵ و واریانس آنها برابر ۵/۲۵ است. درصد ضریب تغییرات آنها چقدر است؟

۱) ۷۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ : گزینه«۱» $\sigma^2 = \sigma \rightarrow 25/2 = ۱/۵$

درصد ضریب تغییرات = ۰/۱× ۱۰۰=۱۰ $\longrightarrow$ $C.V = \frac{\sigma}{X} = 0/1$

۸۳ .اگر ضریب تغییرات z و y و x برابر ۰/۲ باشد، ضریب تغییرات کدام داده‌ها نیز ۰/۲ است؟

۱) $x+۲ , y+۲ , z+۲$ ۲) $۲x-۱ , ۲y-۱ , ۲z-۱$

۳) $۲x , ۲y , ۲z$ ۴) $\frac{۱}{۲}x-۱ , \frac{۱}{۲}y-۱ , \frac{۱}{۲}z-۱$

پاسخ : گزینه«۳»

۸۴ .در یک نمونه گیری آماری مجموع ۱۰ داده برابر ۵۰ و ضریب تغییرات آنها $\frac{۱}{۵}$ است، مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

۱) ۲۴۹ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۵۷ ۴) ۲۶۰

پاسخ : گزینه«۴» $x=\frac{\sum fx}{n} = ۵$ $C.V = \frac{\sigma}{X} \rightarrow \sigma^2 = 1$

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - x^2 \rightarrow 1 = \frac{\sum x^2}{10} - (5)^2$

۸۵ .اگر میانگین داده‌های آماری $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ برابر ۳ و انحراف معیار آنها مساوی ۰/۶ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $۳a_۱+۱ , ۳a_۲+۱ , \dots , ۳a_n+۱$ کدام است؟

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳۸ ۴) ۰/۴

پاسخ : گزینه«۱»

۸۶ چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۴و۳و۲و۱ وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۴و۲ حداقل یک بارظاهر شوند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

برای حل این نوع مثال از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. یعنی اعداد چهار رقمی که رقم‌های ۲ و ۴ در آن وجود ندارد را به دست می‌آوریم و از کل اعداد چهاررقمی که با این ارقام ساخته می‌شوند، کم می‌کنیم.

$A_۱$ {اعداد چهار رقمی که رقم ۲ ندارند}

$A_۲$ {اعداد چهار رقمی که رقم ۴ ندارند}

$$\left|\overline{A_۱ \quad A_۲}\right| = |S| - \left[|A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \quad A_۲|\right]$$

تعداد کل اعداد چهار رقمی که با این ارقام ساخته می‌شود $|S| = \boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} = ۲۵۶$

تعداد اعداد چهار رقمی که رقم ۲ ندارند $|A_۱| = \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} = ۳^۴ = ۸۱$

تعداد اعداد چهار رقمی که رقم ۴ ندارند $|A_۲| = \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} = ۳^۴ = ۸۱$

تعداد اعداد چهار رقمی که رقم ۲ و ۴ ندارند $|A_۱ \quad A_۲| = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۴ = ۱۶$

$$\left|\overline{A_۱ \quad A_۲}\right| = ۲۵۶ - [۸۱ + ۸۱ - ۱۶] = ۱۱۰$$

۸۷ چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از رقم‌های ۳ و ۶ ، حداقل یک بار، ظاهر شوند؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

حالت هایی که رقم ۳ و ۶ وجود ندارند را از کل اعداد سه رقمی کم می‌کنیم. پس:

A : {اعداد سه رقمی که رقم ۳ ندارند}

B : {اعداد سه رقمی که رقم ۶ ندارند}

$$\left|\overline{A \quad B}\right| = |S| - |A \quad B|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overline{A \quad B}\right| = ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸) = ۹۰۰ - ۸۴۸ = ۵۲$$

$$|S| : \boxed{۹} \ \boxed{۱۰} \ \boxed{۱۰} = ۹۰۰$$

$$|A| = |B| = \boxed{۸} \ \boxed{۹} \ \boxed{۹} = ۶۴۸$$

(تعداد اعداد ۳ رقمی که ۳ و ۶ ندارند) $|A \cap B| = \boxed{۷} \ \boxed{۸} \ \boxed{۸} = ۴۴۸$

۸۸ تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامد این که مجموع اعداد ظاهر شده بر ۵ بخش پذیر باشد، چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

مجموع اعداد ظاهر شده مضرب ۵ می‌باشد یعنی جمع اعداد روی دو تاس یا ۵ یا ۱۰ است و پیشامد A به شکل زیر است :

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۵,۵),(۶,۴),(۴,۶)\}$$

$$n(A)=۷$$

۸۹ در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو تاس بزرگتر از ۵ ظاهر شود چقدر احتمال دارد هر دو تاس مساوی باشند؟

۱) $\frac{۴}{۲۶}$ ۲) $\frac{۴}{۲۸}$ ۴) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۰}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

پیشامد این که مجموع دو تاس کوچکتر یا مساوی ۵ باشد را A در نظر می‌گیریم:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}\Rightarrow |A|=۱۰$$

پس تعداد اعضای پیشامدی که مجموع دو تاس بزرگتر از ۵ باشد برابر است با:

$$|A'|=۳۶-۱۰=۲۶$$

پیشامد این که هر دو تاس مساوی و مجموعشان بیشتر از ۵ باشد شامل ۴ عضو $(۶,۶),(۵,۵),(۴,۴),(۳,۳)$ است. پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P=\frac{۴}{۲۶}$$

۹۰ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

دو تاس $n(S)=۶\times۶=۳۶$

مجموع دو عدد ۵ $A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۴,۱),(۳,۲)\}\Rightarrow n(A)=۴$

$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۹۱ یک صندوق محتوی ۱۰ عدد ساعت مچی است. چهار عدد از این ساعت‌ها در حالی که هیچ نوع علایم ظاهری ندارند، خراب می‌باشند. شخصی از این صندوق ۳ ساعت به طور تصادفی با هم بیرون می‌آورد. احتمال آن که هر سه ساعت خراب باشند، کدام است؟

۱) $\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$ ۲) $\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۰}{۴}}$ ۳) $\frac{\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۰}{۴}}$ ۴) $\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

از ۱۰ ساعت، تعداد ۴ ساعت خراب است و ما تعداد ۳ ساعت را به تصادف خارج می‌کنیم؛ لذا باید از ترکیب $\binom{۴}{۳}$ استفاده کنیم و تعداد اعضای فضای نمونه $\binom{۱۰}{۳}$ می‌باشد.

$$P=\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

۹۲ دورأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند برابر است با :

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

اولاً ۵ ضلعی دارای ۵ رأس است و ثانیاً برای این که دو رأس مجاور هم باشند باید دو رأس روی یک ضلع باشند؛ یعنی باید دو رأس را از ۵ ضلع انتخاب کنیم، مانند این است که یک ضلع را از ۵ ضلع انتخاب کنیم یعنی: $\binom{۵}{۱}$

$$n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$n(A)=\binom{۵}{۱}=۵ \Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۹۳ اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B-A)=\frac{۲}{۷}$ باشد حداکثر مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۸}{۷}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases}\frac{۱}{۴}=P(A-B)=P(A)-P(A\quad B)\\ \frac{۲}{۷}=P(B-A)=P(B)-P(A\quad B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{۴}=P(A)-x\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{۱}{۴}+x\\ \frac{۲}{۷}=P(B)-x\ \Rightarrow\ P(B)=\frac{۲}{۷}+x\end{cases}$$

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A\quad B)=\frac{۱}{۴}+x+\frac{۲}{۷}+x-x\Rightarrow P(A\quad B)=x+\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۷}$$

اگر $P(A\quad B)=۱$ باشد حاصل $\frac{P(A)}{P(B)}$ حداکثر است، زیرا اگر آن را تابعی از x در نظر گیریم، این تابع صعودی است.

$$۱=x+\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۷}\Rightarrow x=۱-\frac{۱۵}{۲۸}=\frac{۱۳}{۲۸}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۴}+x}{\frac{۲}{۷}+x}=\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱۳}{۲۸}}{\frac{۲}{۷}+\frac{۱۳}{۲۸}}=\frac{۲۰}{۲۱}$$

۹۴ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\quad B)\,,\,P(B)=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۶}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون دو پیشامد مستقلند، لذا:

$$P(A\quad B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A)\times(B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۶}{۱۲}$$

۹۵ دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال هر یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : چون اعداد ظاهر شده نباید مضرب ۳ باشند، یعنی اعداد ۳ و ۶ ظاهر نشوند، لذا از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی در تاس اول احتمال این که اعداد ۳ و ۶ ظاهر شود،برابر است با: $\frac{۲}{۶}$ و چون دو تاس است، احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. (دو پیشامد مستقل از هم هستند).

$$P_{\text{(عدد ۳و۶ ظاهر شود)}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \underset{\text{(عدد ۳ و ۶ ظاهر نشود)}}{} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P_{\text{(هر دو تاس مضرب ۳ نباشد)}} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}$$

۹۶ از کیسه‌ای که محتوی ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است دو مهره با هم و به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال این که این دو مهره هم رنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : ابتدا احتمال این که دو مهره هم رنگ باشند را تعیین می‌کنیم، آنگاه آن را از عدد ۱ کم می‌کنیم. احتمال اهم رنگ نبودن به دست می‌آید.

توجه : دو مهره هم رنگ باشن، یعنی هر دو سفید یا هر دو سیاه هستند: لذا از قانون جمع احتمال‌ها استفاده می‌کنیم.

مهره‌ی سفید	۲
مهره‌ی سیاه	
جمع	۳
	۵

$$n(S) = ۲ + ۳ = ۵$$

$$P(A) = P_{\text{(دو مهره سفید)}} + P_{\text{(دو مهره سیاه)}} = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

احتمال این که دو مهره هم رنگ نباشد $P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$

۹۷ اگر $P(A-B)=P(A)-P(B)$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

۲) $P(B-A)=P(A-B)$

۳) $P(B-A)=P(B)$

۴) $P(B-A)=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم که :

$$\begin{cases} P(A-B)=P(A)-P(A\quad B) \\ P(B-A)=P(B)-P(A\quad B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A)-P(A\quad B)=P(A)-P(B) \Rightarrow P(A\quad B)=P(B) \Rightarrow$$

$$P(B-A)=P(B)-P(B)=۰ \Rightarrow P(B-A)=۰$$

۹۸ اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\quad B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$

۲) $\frac{۱۳}{۳۶}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$P(A)=\frac{۱}{۴} \ , \ P(B)=\frac{۱}{۶} \ , \ P(A|B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\quad B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{P(A\quad B)}{\frac{۱}{۶}} \Rightarrow P(A\quad B)=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A\quad B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۹+۶-۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

۹۹ در پرتاب دو مکعب با هم مشروط بر آن که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، احتمال آن که هر دو عدد رو شده زوج باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$x+y=۶$$

چون مجموع دو عدد، برابر ۶ و هر دو عدد باید زوج باشند، لذا به صورت $A=\{(۴,۲),(۲,۴)\}$ است. و از طرفی فضای نمونه عبارتست از:

$$S=\{(۲,۴),(۱,۵),(۴,۲),(۵,۱),(۳,۳)\}$$

$$\Rightarrow n(S)=۵ \ , \ n(A)=۲ \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۵}$$

۱۰۰ در یک کارخانه ۷۰۰ کارگر مشغول کار هستند که ۳۰۰ نفر آن‌ها زن و بقیه مرد هستند. ۷٪ زنان و ۱۲٪ مردان تحصیلات دیپلم دارند. فردی به تصادف انتخاب می‌شود، اگر این فرد دیپلم باشد، احتمال این که زن باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۶}{۲۳}$ ۲) $\frac{۷}{۲۳}$ ۳) $\frac{۶۹}{۷۰۰}$ ۴) $\frac{۲۱}{۷۰۰}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

طبق قانون بیز داریم:

$$P(\text{زن} \mid \text{دیپلم}) = \frac{P(\text{زن}) \times P(\text{دیپلم} \mid \text{زن})}{P(\text{دیپلم})}$$

$$P(\text{زن}) = \frac{۳۰۰}{۷۰۰} = \frac{۳}{۷} \qquad P(\text{دیپلم} \mid \text{زن}) = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$$P(\text{مرد}) = \frac{۴۰۰}{۷۰۰} = \frac{۴}{۷} \qquad P(\text{دیپلم} \mid \text{مرد}) = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

$$P(\text{دیپلم}) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۷}{۱۰۰} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

طبق قانون کلی:

$$P(\text{زن} \mid \text{دیپلم}) = \frac{\frac{۳}{۷} \times \frac{۷}{۱۰۰}}{\frac{۳}{۷} \times \frac{۷}{۱۰۰} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۱۴}{۱۰۰}} = \frac{۲۱}{۲۱+۴۸} = \frac{۲۱}{۶۹} = \frac{۷}{۲۳}$$

۱۰۱ به ازای کدام مقدار a جدول زیر جدول توزیع متغیر تصادفی x است؟

x_i	-۵	-۴	۱	۲
$F_x(X=x_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	a	$\frac{۱}{۸}$

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون جدول داده شده مربوط به توزیع متغیرهای تصادفی است، لذا باید مجموع احتمال‌ها در آن برابر یک باشد:

$$\sum p(x=x_i)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+a+\frac{۱}{۸}=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۲ یک تاس همگن را هشت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که ۴ بار رقم شش ظاهر شود چقدر است؟

۱) $\binom{۸}{۴}$ ۲) $\binom{۸}{۴}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\binom{۸}{۴}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۴}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}$ ۴) $\binom{۸}{۴}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۴}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : از تابع توزیع احتمال دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$P(x)=\binom{n}{x}P^{x}(۱-P)^{n-x}$$

احتمال این که هر بار رقم ۶ ظاهر شود، برابر است با $P=\frac{۱}{۶}$

$$\Rightarrow\ P=\binom{۸}{۴}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۴}\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)^{۸-۴}=\binom{۸}{۴}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۴}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}$$

۱۰۳ اگر زاویه‌ی α را به تصادف در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{۴\pi}{۳}\right]$ انتخاب کنیم احتمال آن که $\sin^{۲}\alpha<\cos^{۲}\alpha$ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مواردی را که $|\text{Sin}\alpha|<|\text{Cos}\,\alpha|$ می‌باشد را جدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{\pi}{۴} & \Rightarrow \text{Sin}\,\alpha<\text{Cos}\alpha & \text{ق ق}\\ \frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲} & \Rightarrow \text{Sin}\alpha>\text{Cos}\alpha & \text{غ ق ق}\\ \frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴} & \Rightarrow \text{Sin}\alpha>\text{Cos}\alpha & \text{غ ق ق}\\ \frac{۳\pi}{۴}<\alpha<\pi & \Rightarrow \text{Sin}\alpha<|\text{Cos}\alpha| & \text{ق ق}\\ \pi<\alpha<\frac{۴\pi}{۳} & \Rightarrow |\text{Sin}\alpha|<|\text{Cos}\alpha| & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\right)+\left(\pi-\frac{۳\pi}{۴}\right)+\left(\frac{۴\pi}{۳}-\pi\right)=۱۰۵$$

$$n(s)=\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۶}=۲۱۰\ \Rightarrow P=\frac{۱۰۵}{۲۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۴ اگر زاویه‌ی α را به تصادف در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ انتخاب کنیم، احتمال آن که $\sin\alpha<\cos\alpha$ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم که وقتی $۰\le\alpha<\frac{\pi}{۴}$ باشد، $\sin\alpha<\cos\alpha$ است. که این فاصله یعنی بازه‌ی $\left[۰,\frac{\pi}{۴}\right)$ برابر $\frac{۱}{۴}$ بازه‌ی $[۰,\pi]$ است؛ بنابراین احتمال آن برابر $P=\frac{۱}{۴}$ است.

۱۰۵ بین اعدادسه رقمی یک عدد فرد انتخاب می‌کنیم، احتمال این که این عدد مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

تعداد اعداد سه رقمی $n(S)=۱۰۰۰-۱۰۰=۹۰۰$ تعداد اعداد سه رقمی فرد $\rightarrow ۹۰۰\div ۲=۴۵۰$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۳ $n(A)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]=۳۳۳-۳۳=۳۰۰$

باید تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۳ و فرد را بیابیم $\rightarrow \frac{۳۰۰}{۲}=۱۵۰ \rightarrow P=\frac{۱۵۰}{۴۵۰}=\frac{۱}{۳}$

سوالات ریاضیات گسسته

۱. در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس‌های زوج عددی ..... و تعداد رأس‌های فرد عددی ..... است.

۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج ۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

پاسخ : گزینه‌ی «۴»: گراف مورد نظر دارای ۱۶ رأس است از طرفی می‌دانیم که تعداد رئوس درجه فرد یک گراف زوج است و در این جا تعدادکل رئوس عددی است زوج بنابراین تعداد رئوس درجه زوج نیز عددی است زوج. یعنی گزینه ۴ درست است.

۲. با سه رأس $V=\{a , b , c\}$ چند گراف جهت دار می‌توان تشکیل داد که فقط یک طوقه داشته باشند؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۹۲ ۴) ۸۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : ابتدا کل گراف‌های بدون طوقه را پیدا می‌کنیم. $N=۲p^{۲}-p=۲^{۹-۳}=۶۴$ ؛

این گراف‌ها یا در رأس a ویا در رأس b و یا در رأس c طوقه دارند. پس: $۶۴\times۳=۱۹۲$

۳. در یک گراف $\delta=۳$ و $p=۱۱$ است. در این گراف حداقل $\sum_{i=۱}^{P}\deg V_i$ چقدر است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲» همان طور که در نکات آمد، $\delta\le\frac{۲q}{p}$ بنابراین:

$$۳\le\frac{۲q}{۱۱} \Rightarrow ۲q\ge۳۳ \rightarrow ۲q\ge۳۴ \rightarrow q\ge۱۷$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q\ge۳۴$$

۴. اگر در یک گراف «۵ـ منتظم» از مرتبه‌ی p داشته باشیم $q=۲p+۷$ ، این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

همان طور که گفتیم در گراف r– منتظم از مرتبه‌ی p داریم، $q=\frac{rp}{۲}$ ، پس:

$$\begin{cases} q=\frac{۵}{۲}p \\ q=۲p+۷ \end{cases} \rightarrow \frac{۵}{۲}p=۲p+۷ \Rightarrow \frac{p}{۲}=۷ \Rightarrow p=۱۴$$

۵. گرافی با ۶ رأس دارای ۱۴ یال است. درجه‌ی چند رأس از این گراف ۵ است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : این گراف را با گراف $K_۶$ مقایسه می‌کنیم: $q_۶ = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$

چون گراف داده شده یک یال از گراف کامل کمتر دارد، پس دو رأس از درجه Maxخارج شده، در گراف $K_۶$ درجات تمام رئوس ۵ می‌باشد و اگر یک یال را حذف کنیم دو رأس از درجه‌ی ۴ خواهد شد و بقیه‌ی رئوس درجه ۵ می‌باشند.

(تعداد رئوس درجه ۵ $۶-۲=۴$)

۶. اگر G یک گراف ساده با p رأس و $\bar{G}$ مکمل G باشد، کدام حکم درست است؟

۱) $\Delta(G)+\Delta(\bar{G})=p$

۲) $\Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱$

۳) $\delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱$

۴) $\delta(G)+\Delta(\bar{G})=p$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : چون $\bar{G},G$ مکمل هستند پس متناظر یک رأس یا Max درجه از G یک رأس با Min درجه از $\bar{G}$ می‌باشد و مجموع درجه‌های دو رأس متناظر در G و $\bar{G}$ مساوی $p-۱$است. یعنی: $\Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱$

۷. اگر $I_۱, I_۲, ..., I_n$ بازه‌های باز ناتهی باشند به طوری که به ازای هر $i \neq j$ که $j \leq n$ و $۱ \leq i$ داشته باشیم $I_i \quad I_j = \Phi$ در این صورت کدام درست است؟

۱)گرافی وجود ندارد که این بازه‌ها رئوس آن باشند.

۲) درگراف این بازه‌ها تعداد رئوس بیش‌تر از تعداد یال‌هاست.

۳) گراف این بازه‌ها کامل است.

۴) در گراف این بازه‌ها تعداد یال‌ها بیشتر از تعداد رئوس است.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : گراف بازه‌ها گرافی می‌باشد که رأس‌هایش متناظر با بازه‌ها باشد و دو رأس در صورتی مجاور هستند که بازه‌های مربوط به آن‌ها متمایز باشند و با اشتراک آنها تهی نباشد. در این تست چون $I_i \quad I_j = \Phi$ پس هیچ دو رأسی مجاور نمی‌باشند و گراف بازه‌ها تهی است که شامل n رأس بوده و یال ندارد و گزینه‌ی ۲ درست است.

۸. کدام یک از احکام زیر درست است؟

۱)هر گراف همیلتنی هم‌بند است.

۲) هر گراف کامل از مرتبه بزرگتر از ۲ همیلتنی است.

۳) در یک گراف همیلتنی درجه هیچ رأسی نمی‌تواند برابر ۱ باشد.

۴) هر سه مورد فوق درست است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : گراف‌های کامل اگر از مرتبه بزرگتر از ۲ باشند آنگاه دارای دور همیلتنی هستند. در گراف همیلتنی چون در موقع دور زدن وارد یک رأس می‌شویم و از همان رأس خارج می‌شویم پس حداقل درجه‌ی رأس ۲ است.

۹. کدام نادرست است؟

۱)هر گراف که هم بند نباشد درخت نیست.

۲) هر گراف که هم بند نباشد منتظم نیست.

۳) هر گراف که هم بند نباشد اویلری نیست.

۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

گراف منتظم ممکن است هم بند نباشد مانند گراف که ۱ـ منتظم مرتبه‌ی ۴ بوده و ناهم‌بند است.

۱۰. در کدام گزینه ماتریس مجاورت نشان دهنده یک گراف منتظم است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : در گزینه‌ی ۳، درجه‌ی تمامی رئوس ۲ است، پس گراف منتظم است.

تذکر: مجموع درایه‌های هر سطر (یا ستون) برابر درجه آن رأس است.

۱۱. حاصل عبارت $۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲ \quad (n\in N)$ کدام است؟

۱) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$

۲) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۳) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲}$

۴) $n^۳=n$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

در این نوع مسائل بهتر است با عدد گذاری به جای n گزینه صحیح را پیدا کنیم.

به ازای $n=۱$ گزینه ۳ و ۴ نادرست می‌شوند.

به ازای $n=۲$ گزینه ۱ نادرست می‌شود و در نتیجه گزینه‌ی ۲ صحیح است.

روش دوم: با توجه به فرمول

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \quad n\in N$$

۱۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر همواره بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱)مجموعه دو عدد فرد ۲) مجموع دو زوج ۳) مجموع دو عدد فرد متوالی ۴) مجموع دو عدد زوج متوالی

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

گزینه‌ی ۱ نادرست است . مثال نقض $۱+۹=۱۰$

گزینه‌ی ۲ نادرست است. مثال نقض $۴+۶=۱۰$

گزینه‌ی ۴ نادرست است. مثال نقض $۲+۴=۶$

گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا دو عدد فرد متوالی $۲k+۱$ و $۲k+۳$ است و

$$(۲k+۱)+(۲k+۳)=۴k+۴=۴(k+۱)=۴q$$

۱۳. چند عدد سه رقمی مربع کامل وجود دارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$۱۰^۲ \le k^۲ \le ۳۱^۲ \Rightarrow ۱۰ \le k \le ۳۱ \Rightarrow$$ تعداد جواب‌ها $۳۱-۱۰+۱=۲۲$

$$a=۲۵b+۱۷ \;;\; ۱۷<b$$

۱۴. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقیمانده ۱۷ و خراج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$a=۶k \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۵b+۱۷ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱\times b+۵ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow b+۵ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow b=۶k+۱$$

$$b>۱۷ \rightarrow b_{min}=۶\,۳+۱=۱۹$$

لذا : $a_{min}=۱۹\times ۲۵+۱۷=۴۹۲$

کاملاً مشخص است که رقم دهگان مورد نظر ، ۹ می‌باشد.

۱۵. مجموع ارقام بزرگترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی مانده، توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{array}{l|l} a & 47 \\ \hline q^2 & q \end{array} \Rightarrow a = 47q + q^2 \quad , \quad |a| > 47 \quad , \quad q^2 < 47 \Rightarrow 0 < q \le 6$$

چون سمت راست مضرب q است پس باید a نیز مضرب q باشد.

$$a = q(47+q) \Rightarrow kq = q(47+q) \Rightarrow j = 47+q$$

$$1 \le q \le 6 \Rightarrow \begin{cases} q = 1, 2, \dots, 6 \\ k = 48, 50, \dots, 53 \end{cases} \longrightarrow a = kq = 53 \times 6 = 318 \Rightarrow 3+1+8 = 12$$

۱۶. در جلوی عدد $50!$ چند صفر قرار دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

به ازای هر ۲ و ۵ در تجزیه $n!$ ، یک صفر جلوی $n!$ قرار دارد و چون در $n!$ توان ۲ از توان ۵ بیشتر است، پس کافی است توان ۵ را محاسبه کنیم.

توان ۵ در $50!$ = توان ۱۰ در $50!$ $= \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right]$

$= 10 + 2 = 12$

در نتیجه ۱۲ تا صفر جلوی $5!$ وجود دارد.

۱۷. کوچکترین مقدار n که به ازای آن $n!$ بر 219×10^{16} بخش‌پذیر باشد کدام است؟

۱) ۷۳ ۲) ۲۱۹ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : می‌خواهیم $n!$ بر عدد $219 \times 10^{16} = 73 \times 3 \times 2^{16} \times 5^{16}$ بخش پذیر باشد. با توجه به این که ۷۳ اول است. پس $n!$ باید دست کم یک عامل ۷۳ داشته باشد. در نتیجه از $73!$ شروع می‌کنیم که عامل ۷۳ دارد.

از طرفی در $73!$ عامل ۳ نیز هست. پس کافی است توان ۲ و ۵ یعنی توان ۱۰ در $n!$ حداقل ۱۶ باشد و چون توان ۱۰ با توان ۵ برابر است (در $n!$ بنابراین کافی است توان ۵ حداقل ۱۶ باشد:

توان ۵ $= \left[\frac{73}{5}\right] + \left[\frac{73}{25}\right] = 14 + 2 = 16$

پس $73!$ کوچکترین عدد ممکن است و در نتیجه $n = 73$ قابل قبول است.

۱۸. اگر $A=(۲۱۲۲)_۳$ باقیمانده‌ی تقسیم $۸۲A$ بر ۱۰ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$A=(۲۱۲۲)_۳=۲+۲(۳)+۱(۳)^۲+۲(۳)^۳=۷۱$$

$$A۲A=۸۲(۷۱)\overset{۱۰}{\equiv}۲\times۱=۲$$

۱۹. به ازای کدام مقدار n ، مجموع ارقام عدد $۱۰^{۳n}-۱۰^{n}$ برابر ۲۱۶ می‌شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$A=۱۰^{۳n}-۱۰^{n}=۱۰^{n}\left(۱۰^{۲n}-۱\right)=۱۰^{n}\ \underline{(۹۹...۹۹)}=\underline{۹۹۹...۹۹}\ \underline{.....}$$

مجموع ارقام A $=(۹+۹+...+۹)+(۰+۰+...)=۲n\times۹=۲۱۶\ \Rightarrow\ n=\frac{۲۱۶}{۲\times۹}=۱۲$

n تا ۲n تا ۲n مرتبه

۲۰. کدام معادله به ازای هیچ مقدار k جواب ندارد؟ $(x,y\in Z)$

۱) $x^۲+y^۲=۴k$

۲) $x^۲+y^۲=۴k+۳$

۳) $x^۲+y^۲=۴k+۱$

۴) $x^۲+y^۲=۴k+۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

هر عدد مربع کامل به صورت $۴k$ یا $۴k+۱$ می‌باشد. بنابراین سه حالت زیر را داریم:

۱) $x^۲+y^۲=۴k+۴k'=۴(k+k')=۴k''$

۲) $x^۲+y^۲=۴k+۴k'+۱=۴(k+k')+۱=۴k''+۱$

$x^۲+y^۲=۴k+۱+۴k'+۱=۴(k+k')+۲=۴k''+۲$

مشاهده می‌شود که عبارت گزینه‌ی ۲ به هیچ کدام از سه صورت فوق نمی‌باشد.

۲۱. حداقل چند عدد از مجموعه $\{۲,۳,۴,...,۳۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آنها مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : می‌دانیم که در زیر مجموعه‌ی شامل اعداد اول از مجموعه‌ی داده شده یعنی $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$ هر دو عضو دلخواه نسبت به هم اول هستند ولی طبق اصل لانه کبوتری اگر حداقل یک عضو دیگر از مجموعه‌ی داده شده به این زیر مجموعه بیفزاییم با توجه به این که آن عدد مرکب است حداقل نسبت به یکی از این ۱۰ عضو غیر اول است. پس مجموعه‌ی مورد نظر حداقل ۱۱ عضو دارد.

۲۲. اگر $r=(۹۱,۶۳)$ و $r=۹۱a+۶۳b$ و $a+b$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه‌ی «۳» :

$$r=(۹۱,۶۳)=۷ \Rightarrow ۷=۹۱a+۶۳b$$

طبق قضیه بزو اگر $(a,b)=d$ باشد، آنگاه $d=ra+sb$ است و $(r,s)=۱$ است.

$$\Rightarrow ۷=۷\times۱۳a+۹\times۷b \Rightarrow ۱=۱۳a+۹b=-۲۶+۲۷=۱ \quad \Rightarrow a=-۲ \ , \ b=۳ \Rightarrow a+b=۱$$

۲۳. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $(۱۶a+۱۸)$ و $(۱۶a+۲)$ به ازای مقادیر مثبت a چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\begin{array}{r|l} ۱۶n+۱۸ & ۱۶a+۲ \\ \cline{2-2} ۱۶a+۲ & ۱ \\ \hline ۱۶ & \end{array} \Rightarrow d=۱$$

۱۶ یا ۸ یا ۴ یا ۲ یا ۱

تعداد مقسوم علیه‌ها ۵ است.

۲۴. از احکام زیر کدام نادرست است؟

۱)اگر $c=[a,b]$ و m مضرب مشترکی برای a و b باشد، آنگاه $c|m$

۲) برای هر دو عدد غیر صفر a و b داریم، $[a,b](a,b)=|ab|$

۳) اگر $b|c,a|c$ و $(a,b)=۱$ ، آنگاه $c|ab$

۴) اگر $(a,b)=۱$ و $(a,c)=۱$ ، آنگاه $(a,bc)=۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : گزینه‌ی (۱) درست است، زیرا اگر $[a,b]=c$ باشد آنگاه $a|c,b|c$ است، لذا مضرب مشترک آنها یعنی m بر عدد c قابل قسمت است، زیرا c کوچکترین مضرب مشترک است. یعنی $c|m$

گزینه‌ی (۲) نیز درست است. زیرا $[a,b]\times d=|ab|$

گزینه‌ی (۴) نیز درست است. زیرا اگر $(a,b)=۱$ و $(a,c)=۱$ باشد آنگاه a و bc نسبت به هم اولند.

۲۵. چند زوج عدد طبیعی وجود دارد که بین کوچکترین مضرب مشترک و خود دو عدد رابطه‌ی $M=a+b$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} a=a'd \\ b=b'd \\ M=a'b'd \end{cases} , \ (a',b')=۱ \ , \ M=a+b \ \Rightarrow \ a'b'd=a'd+b'd \ \Rightarrow \ a'b'=a'+b'$$

چون $(a',b')=۱$ است پس باید $b'=۲$ و $a'=۲$ باشد که غیر قابل قبول است پس وجود ندارد.

۲۶. تعداد اعداد دو رقمی که نسبت به ۶ اول باشند، برابر است با:

۱) ۴۵ ۲) ۳۳ ۳) ۳۰ ۴) ۲۷

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

اعدادی نسبت به ۶ اول هستند که مضرب ۲ و ۳ و ۶ نباشند. در ضمن تعداد اعداد دو رقمی ۹۰ می‌باشد.

تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۲ $\frac{۹۰}{۲}=۴۵$

تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳ $\frac{۹۰}{۳}=۳۰$

تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۶ $\frac{۹۰}{۶}=۱۵$

$$m(A \quad B)=m(A)+n(B)-n(A \quad B)$$

تعداد اعداد مضرب ۲ یا ۳ یا ۶ $\Rightarrow \ ۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$

$۹۰-۶۰=۳۰$ تعداد اعدادی که نسبت به ۶ اولند.

۲۷. تعداد اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰ .....

۱) ۲۵۰ است. ۲) بیش‌تر از ۲۵۰ است. ۳) بین ۲۵۰ و ۳۰۰ است. ۴) کم‌تر از ۲۵۰ است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴»: اعدادی که از ۵۰۰ کوچکترند یعنی از ۱ تا ۵۰۰ چون نصف آنها زوج هستند و تعداد مضرب ۳ هستند، بنابراین اعداد اول آن از نصف کمتر است، یعنی از ۲۵۰ کمتر است.

۲۸. کدام دو عدد در هم نهشتی (پیمانه ۱۲) $a \equiv b$ صادق‌اند؟

۱) ۲۰ و ۶۳ ۲) ۲۳ و ۱۲ ۳) ۲۳ و ۵۹ ۴) ۵۹ و ۲۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : بنا به تعریف هم نهشتی دو عدد به پیمانه‌ی ۱۲ هم نهشت‌اند، اگر و تنها اگر تفاضل آنها مضرب از ۱۲ باشد و در نتیجه:

$۶۳-۲۰=۴۳\neq ۱۲k$

$۲۳-۱۲=۱۱\neq ۱۲k$

درست $۵۹-۲۳=۳۶=۱۲k$

$۵۹-۲۴=۳۵\neq ۱۲k$

۲۹. عدد $(a+b)^n-a^n-b^n$ که درآن a و b نسبت به هم اولند، بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $a+b$ ۲) b ۳) a ۴) ab

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : با توجه به فرمول : $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n \Rightarrow (a+b)^n-a^n-b^n \overset{ab}{\equiv} ۰$

۳۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^{۲m+۲}-۲^{m+۱}$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : برای حل این تست ها به جای m کوچکترین مقدار را قرار می‌دهیم. اگر $m=۱$ آنگاه:

$۳^۴-۲^۲ \overset{۷}{\equiv} ?$

$۸۱-۴=۷۷\overset{۷}{\equiv}۰$

۳۱. اگر (پیمانه ۵) $n\equiv ۱$ آنگاه باقی مانده‌ی $n^۲-۷۹n+۱۶۰۱$ بر ۵ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : با توجه به فرض تست $n\overset{۵}{\equiv}=۱$ می‌باشد و بنا به ویژگی‌های هم نهشتی داریم:

(رابطه‌ی ۱) $n^۲\overset{۵}{\equiv}۱$

(رابطه‌ی ۲) $-۷۹n\overset{۵}{\equiv}-۷۹\overset{۵}{\equiv}۱$

(رابطه‌ی ۳) $۱۶۰۱\overset{۵}{\equiv}۱$

و با جمع طرفین سه رابطه‌ی به دست آمده داریم: $n^۲-۷۹n+۱۶۰۱\overset{۵}{\equiv}۳$

۳۲. اگر عدد صحیح a بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، $a^{۶}$ به کدام صورت نوشته می‌شود؟

۱) $۷k$ ۲) $۷k+۱$ ۳) $۷k-۱$ ۴) $۷k+۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

چون a بر ۷ بخش پذیر نمی‌باشد $(a,۷)=۱$ طبق قضیه‌ی فرما:

$$a^{۷-۱}\overset{۷}{\equiv}۱ \Rightarrow a^{۶}\overset{۷}{\equiv}۱ \Rightarrow a^{۶}=۷k+۱$$

۳۳. رقم یکان عدد $(۷۲۹)^{۷۲۹}+(۷۲۹)^{۷۲۸}+...+(۷۲۹)^{۱}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نکته :اگر عددی که به ۹ ختم می‌شود به توان عدد زوج برسد به یک و اگر به توان عدد فرد برسد به ۹ ختم می‌شود.

پس :
$$(۷۲۰)^{۷۲۹}+(۷۲۹)^{۷۲۸}+...+(۷۲۹)^{۱}\overset{۱۰}{\equiv}۹+۱+...+۹$$

در سمت راست هم نهشتی بالا تعداد اعداد ۹ و تعداد اعداد یک برابرند به استثنای این که آخرین عدد ۹ با هیچ عدد یک جمع نمی‌شود. پس مجموع $۹+...+۱+۹$ به ۹ ختم می‌شود.

۳۴. دو رقم سمت راست عدد $۳!+۶!+۹!+...+۳۰۰!$ کدام است؟

۱) ۰۶ ۲) ۸۶ ۳) ۴۶ ۴) ۶۶

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

چون دو رقم سمت راست را می‌خواهیم باقیمانده را بر ۱۰۰ تعیین می‌کنیم و می‌دانیم که عدد $N!$ وقتی $N\geq۱۰$ باشد دو رقم سمت راست آن صفر است پس فقط تا $۹!$ را بررسی می‌کنیم.

$$۳!+۶!+۹!\overset{۱۰۰}{\equiv}۶+۱۲۰\times۶+۶!(۷\times۸\times۹)\overset{۱۰۰}{\equiv}۶+۲۰\times۶+۲۰\times۶(۵۶\times۹)$$

$$\overset{۱۰۰}{\equiv}۶+۱۲۰+۱۲۰(۵۰۴)\overset{۱۰۰}{\equiv}۶+۲۰+۲۰(۰۴)\overset{۱۰۰}{\equiv}۲۶+۸۰\equiv۱۰۶\equiv۶$$

۳۵. از رابطه‌ی هم نهشتی (پیمانه ۸۴) $۳۶a \equiv ۱۹۲$ کدام نتیجه گیری در پیمانه‌ی ۷ نادرست است؟

۱) $a \equiv ۳$ ۲) $a \equiv ۴$ ۳) $۲a \equiv -۱$ ۴) $۳a \equiv ۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

نکته : $ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (m,c)=d \ \Rightarrow \ a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \ , \ a \overset{m}{\equiv} b \ \Rightarrow \ a.c \overset{m}{\equiv} b.c$

$$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲ \ \Rightarrow \ ۳a \overset{\frac{۸۴}{(۸۴,۱۲)}}{\equiv} ۱۶ \ \Rightarrow \ ۳a \overset{\frac{۸۴}{۱۲}}{\equiv} ۱۶ \ \Rightarrow \ ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \ \Rightarrow \ ۳a \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \ \Rightarrow \ ۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \ \Rightarrow \ a \overset{\frac{۷}{(۷,۳)}}{\equiv} ۹ \ \Rightarrow \ a \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$a \overset{۷}{\equiv} ۳ \ \Rightarrow \ ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \ \Rightarrow \ ۲a \overset{۷}{\equiv} -۱$$

۳۶. معادله‌ی $۹x+۱۳y=۷۰۰$ چند زوج جواب طبیعی دارد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$۹x+۱۳y= \ \text{پیمانه ۹} \ \rightarrow ۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷۰۰ \ \Rightarrow \ ۴y \overset{۹}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\times ۲} ۸y \overset{۹}{\equiv} ۱۴ \overset{۹}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow \ -y \overset{۹}{\equiv} ۵ \ \Rightarrow \ y \overset{۹}{\equiv} ۴ \ \Rightarrow \ y=۹k+۴$$

$$۹x=۷۰۰-۱۳(۹k+۴) \ \Rightarrow \ x=۷۲-۱۳k$$

$$\begin{cases} ۱ \le x=۷۲-۱۳k \ \rightarrow \ ۱۳k \le ۷۱ \\ ۱ \le y=۹k+۴ \ \rightarrow \ ۹k \ge -۳ \end{cases} \Rightarrow \ ۰ \le k \le ۵ \ \Rightarrow$$

۶ زوج

۳۷. عدد ۲۰۹ـ به کدام دسته‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارد؟

۱) $[-۹]$ ۲) $[۷]$ ۳) $[-۷]$ ۴) $[۹]$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : برای این که مشخص کنیم عدد ۲۰۹ـ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارد، باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۱۲ به دست می‌آوریم.

$$۲۰۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \ \Rightarrow \ -۲۰۹ \overset{۱۳}{\equiv} -۵$$

عدد ۵ـ در هیچکدام از گزینه‌ها نیست، اما اگر آن را با ۱۲ جمع کنیم داریم:

$$-۲۰۹ \overset{۱۲}{\equiv} -۵+۱۲ \ \Rightarrow \ -۲۰۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۷$$

۳۸. باقی مانده‌ی $\sum_{n=1}^{100} n!$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نماد $\sum_{n=1}^{100} n!$ یعنی : $\sum_{n=1}^{100} n! = 1!+2!+3!+...+100!$

و باقی مانده تقسیم این عدد بر ۱۲ عبارتست از:

$$1! = 1 \overset{12}{\equiv} 1 \Rightarrow 2! = 2 \overset{12}{\equiv} 2 \Rightarrow 3! = 6 \overset{12}{\equiv} 6 \Rightarrow 4! = 24 \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 5! = 120 \overset{12}{\equiv} 0 , ...$$

و باقی مانده تقسیم بقیه جملات تا $100!$ بر ۱۲ نیز برابر صفر است. پس:

$$\sum_{n=1}^{100} n! \overset{12}{\equiv} 1+2+6=9$$

۳۹. اگر دو زوج مرتب $(a,b),(c,d)$ برابر باشند، داریم:

۱) $ad+bc=0$ ۲) $ad=bc$ ۳) $ac+bd=0$ ۴) $ac=bd$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$(a,b)=(c,d) \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

با ضرب طرفین این دوتساوی در یکدیگر، داریم $ab=cd$ حال اگر تساوی فوق را به صورت زیر بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} a=c \\ d=b \end{cases} \Rightarrow ad=bc$$

۴۰. R یک رابطه است و $R=R^{-1}$ کدام درست است؟

۱)دارای خاصیت پاد تقارنی است. ۲) دارای خاصیت تعدی است.

۳) R دارای خاصیت تقارن است. ۴) R دارای خاصیت بازتابی است.

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

اگر رابطه‌ای با معکوس خود برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که اگر (x,y) در R باشد (y,x) نیز در R خواهد بود پس رابطه خاصیت تقارنی دارد.

۴۱. کدام دو مجموعه یک افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌باشند؟

۱)مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج و مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد

۲) مجموعه‌ی حاصل از مضارب صحیح اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد فرد

۳) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی حاصل از قرینه‌ی اعداد طبیعی

۴) مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ و مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : مجموعه A در صورتی به زیر مجموعه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ افراز می‌شود که این زیر مجموعه‌ها سه خاصیت زیر را داشته باشند.

۱)تمامی زیر مجموعه‌ها مخالف تهی باشند. $\forall_i \quad A_i \neq \phi$

۲) اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی باشند. $\forall_{i,j} \quad A_i \quad A_j = \phi$

۳) اجتماع تمامی زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌ی A را تشکیل دهد. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴۲. رابطه $\sin y = \sin x$

۱)انعکاسی، متعدی و تقارنی است.

۲) انعکاسی است و تقارنی و متعدی نیست.

۳) انعکاسی و تقارنی است و متعدی نیست.

۴) انعکاسی و متعدی است و تقارنی نیست.

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$xRx \Rightarrow \sin x = \sin x \Rightarrow$ رابطه، خاصیت انعکاسی دارد

$xRy \Rightarrow \sin x = \sin y \Rightarrow \sin y = \sin x \Rightarrow yRx \Rightarrow$ رابطه، خاصیت تقارنی دارد

$\left.\begin{array}{l} xRy \Rightarrow \sin x = \sin y \\ yRz \Rightarrow \sin y = \sin z \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x = \sin z \Rightarrow xRz \Rightarrow$ رابطه، خاصیت تعدی دارد.

۴۳. نمایش ماتریسی یک رابطه به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد این رابطه:

۱)پاد متقارن نیست ـ متعدی نیست.

۲) پاد متقارن هست ـ متعدی نیست.

۳) پاد متقارن و متعدی است.

۴) پاد متقارن نیست و متعدی هست.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : اگر حروف a , b , c , d را در ردیف و ستون ماتریس بنویسیم رابطه مربوط به آن ماتریس به صورت زیر است:

$R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(c,d)\}$

ملاحظه می‌شود که پاد متقارن است. ولی متعدی نیست زیرا (a,b) و (b,d) وجود دارد. در حالی که (a,d) وجود ندارد.

۴۴. اگر $\binom{n}{۸}=۲\binom{n}{۷}$ آنگاه n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۳

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\binom{n}{۸}=۲\times\binom{n}{۷} \Rightarrow \frac{n!}{۸!(n-۸)!}=۲\times\frac{n!}{۷!(n-۷)!} \Rightarrow n=۲۳$$

۴۵. معادله $x_۱+x_۲+...+x_r=n-r$ چند جواب غیرمنفی دارد؟

۱) $\binom{n}{r-۱}$ ۲) $\binom{n}{r}$ ۳) $\binom{n+۱}{r}$ ۴) $\binom{n-۱}{r-۱}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

تعداد حالت‌ها برابراست با :

$$\binom{(n-r)+r-۱}{r-۱}=\binom{n-۱}{r-۱}$$

سوالات هندسه۱و۲ و تحلیلی

۱. دو زاویه‌ی A و B متمم هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۲۷° ۲) ۳۶° ۳) ۶۳° ۴) ۷۲

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=۹۰\\ \hat{A}=\frac{۴}{۹}\left(۱۸۰-\hat{B}\right)=۸۰-\frac{۴}{۹}\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow ۸۰-\frac{۴}{۹}\hat{B}+\hat{B}=۹۰\Rightarrow\frac{۵}{۹}\hat{B}=۱۰\Rightarrow B=۱۸\Rightarrow A=۷۲$$

۲. در مثلثی $\hat{A}=۵۰$ و $\hat{B}=۶۰$ است. زاویه‌ی بین نیم ساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۷۵ ۳) ۵ ۴) ۴۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر عمودمنصف، BC، نیم ساز AD را در Oقطع کند داریم:

$$DOH:\hat{O}=۹۰-\hat{D}_۱$$

$$\hat{D}_۱=\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}=۶۰+۲۵=۸۵$$

$$\hat{O}=۹۰-۸۵=۵$$

۳. کدام گزینه غلط است؟

۱)دو زاویه مجانب مکمل یکدیگرند. ۲) نیم سازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتدادند.

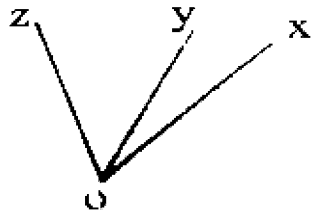
۳) در مثلث، دو زاویه‌ی مکمل وجود دارد. ۴) دو زاویه‌ی مجاور متمم یکدیگرند.

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

دو زاویه مجاور دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع غیر مشترک آنها در دو طرف ضلع مشترک قرار داشته باشد. در شکل $x\hat{o}y$, $y\hat{o}z$ مجاور یکدیگر هستند و زاویه بینشان ۹۰ نیست.

تشریح سایر گزینه‌ها : گزینه‌ی ۱ دو زاویه مجانب دو زاویه مجاور هستند که مکمل یکدیگرند.

گزینه‌ی ۳ در مثلث، اگر دو زاویه مکمل وجود داشته باشد، مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از ۱۸۰ خواهد بود که غیرممکن است.



۴. اگر در مثلث متساوی الساقین ABC، طول نیم ساز داخلی زاویه‌ی B برابرطول قاعده‌ی BC باشد، زاویه‌ی A برابر است با:

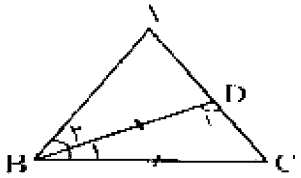
۱) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۰}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$\hat{B}$ نیمساز $BD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲$

$BD=BC \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_۱$

ABC متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$



$\hat{D}_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABD $\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{A}+\hat{B}_۲$

$$\hat{D}_۱=\hat{C}=\hat{B}=\hat{A}+\hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}+\frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۲\hat{A}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{B}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+۲(۲\hat{A})=۱۸۰ \Rightarrow ۵\hat{A}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}=۳۶ =\frac{\pi}{۵}$$

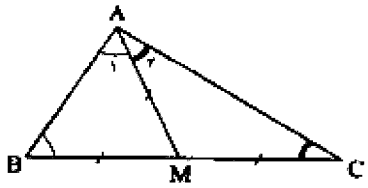
۵. در مثلث ABC ، ضلع $BC=۱۰$ و میانه‌ی AM برابر ۵ است. این مثلث:

۱)در رأس A حاده است. ۲) در رأس A قائمه است.

۳) در رأس A منفرجه است. ۴) هر سه حالت می‌تواند باشد.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : میانه‌ی AM ، ضلع BC را نصف می‌کند، پس با توجه به فرض داریم:

$$AM=BM=MC=۵$$



پس هر یک از دو مثلث ABM و ACM متساوی الساقین است و لذا داریم:

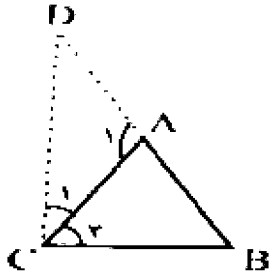
$$\begin{cases}\hat{A}_۱=B\ ,\ \hat{A}_۲=C\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\hat{A}_۱+\hat{A}_۲)}+\underbrace{(\hat{B}+\hat{C})}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰$$

۶. یک ساق مثلث متساوی الساقین را از طرف رأس مثلث به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث چه نوع مثلثی را تشکیل می‌دهد؟

۱)قائم الزاویه ۲)قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین ۳) متساوی الساقین ۴) منفرجه الزاویه

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\Delta ABC = \hat{A} + ۲\hat{C}_۲ = ۱۸۰$$
$$\Delta ACD: A_۱ + ۲\hat{C}_۱ = ۱۸۰$$
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}_۱ + ۲\left(\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲\right) = ۳۶۰$$
$$\Rightarrow ۱۸۰ + ۲\hat{C} = ۳۶۰ \quad \Rightarrow \hat{C} = ۹۰$$



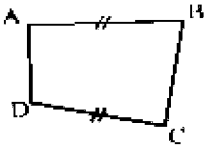
نکته: در هر مثلث که میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف همان ضلع باشد، مثلث مورد نظر قائم الزاویه است.

۷. کدام قضیه درست نیست؟

۱)متوازی الاضلاع که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است. ۲) ذوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشد، متساوی الساقین است.

۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد، مربع است. ۴) هر چهار ضلعی که دو ضلع‌اش برابرباشند، ذوزنقه است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : شکل نشان می‌دهد بیشمار چهار ضلعی وجود دارد که دو ضلعش برابرند ولی ذوزنقه نیستند.



۸. کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱)لوزی که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد. ۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند. ۴) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشند.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

گزینه‌ی ۱ نادرست است، زیرا اگریک قطرلوزی با ضلع آن برابر باشد، زوایای آن قائمه نیست.

گزینه‌ی ۲ نادرست است، متوازی الاضلاعی که دو قطر آن مساوی باشند، مستطیل است.

گزینه‌ی ۴ نادرست است، زیرا این ذوزنقه را قائم الزاویه می‌گویند.

۹. اگر مجموع زوایای خارجی n ضلعی منتظم را با A_n و تعداد اقطار آن را با D_n نمایش دهیم، کدام درست است؟

۱) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹۹}$, $A_{۲۰۰} > A_{۱۹۹}$

۲) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$

۳) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} < A_{۱۹۹}$

۴) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مجموع زوایای خارجی n ضلعی برابر با ۳۶۰ است. بنابراین داریم، $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$ اما با توجه به رابطه‌ی (تعداد قطرهای n ضلعی) $= \frac{n(n-۳)}{۲}$ داریم : $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$

۱۰. در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. در این صورت نسبت $\frac{AH}{BH'}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{AC}{BC}$

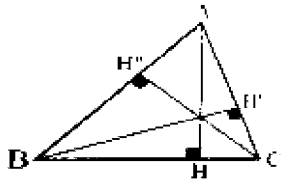
۲) $\frac{AC^۲}{BC^۲}$

۳) $\frac{BC}{AC}$

۴) $\frac{BC^۲}{AC^۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{BH' \times AC}{۲} \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC}$$



۱۱. اگر طول اضلاع مثلثی ۲و۳و۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\sqrt{۲}$

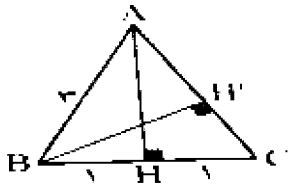
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$BC = ۲ \Rightarrow BH = ۱ \Rightarrow AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۹-۱} = ۲\sqrt{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{BH' \times AC}{۲}$$

$$\Rightarrow BH' = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲}{۳} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$



۱۲. هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع $\frac{۵}{۸}$ باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

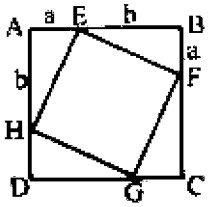
پاسخ : گزینه‌ی «۲»

مساحت مربع ABCD $S=AB^{۲}=(a+b)^{۲}$

مساحت مربع EFGH $S'=EF^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

$$\frac{S'}{S}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{(a+b)^{۲}}=\frac{۵}{۸} \Rightarrow ۸a^{۲}+۸b^{۲}=۵a^{۲}+۵b^{۲}+۱۰ab$$

$$\Rightarrow ۳\left(a^{۲}+b^{۲}\right)=۱۰ab \Rightarrow \frac{a^{۲}+b^{۲}}{ab}=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{۱۰}{۳}$$



$$\frac{a}{b}=x \Rightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۳+\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=۳,\frac{۱}{۳}$$

۱۳. نقطه‌ی M درون مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $۶\sqrt{۳}$ قرار دارد. مجموع فاصله‌های این نقطه از سه ضلع چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶+\sqrt{۳}$ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مجموع فاصله های هر نقطه واقع دردرون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر با ارتفاع مثلث است، و ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است پس:

$$\frac{\left(۶\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{۳}\right)}{۲}=۹$$

۱۴. در مثلث قائم الزاویه‌ای به طول اضلاع a و $a+۷$ و $a+۸$ طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۳۰}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۲۰}{۱۳}$ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

بنا بر قضیه‌ی فیثاغورس $(a+۸)^۲=(a+۷)^۲+a^۲$

$\Rightarrow a^۲+۱۶a+۶۴=a^۲+۱۴a+۴۹+a^۲$

$\Rightarrow a=-۳$ غ‌ق‌ق و $a=۵$ ق‌ق

از طرفی $BH\times AC=AB\times BC \Rightarrow BH\times ۱۳=۵\times ۱۲ \Rightarrow BH=\frac{۶۰}{۱۳}$

۱۵. روی پاره خط $AB=a$ ، دو نقطه‌ی M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=۲$ ، در این صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

۱) $\frac{a}{۶}$ ۲) $\frac{a}{۲}$ ۳) $\frac{a}{۳}$ ۴) $\frac{۲a}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

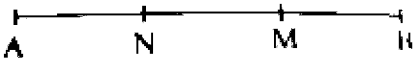
$\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۱}$ ترکیب نسبت در مخرج $\Rightarrow \frac{AM}{AM+MB}=\frac{۲}{۲+۱} \Rightarrow \frac{AM}{a}=\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow AM=\frac{۲}{۳}a$

$\frac{BN}{AN}=\frac{۲}{۱}$ ترکیب نسبت در صورت $\Rightarrow \frac{BN+AN}{AN}=\frac{۲+۱}{۱} \Rightarrow \frac{a}{AN}=۳$

$\Rightarrow AN=\frac{a}{۳}$

$MN=AM-AN=\frac{۲}{۳}a-\frac{a}{۳}=\frac{a}{۳}$



۱۶. در مثلث ABC ، E روی AB و بین A و B ، F روی AC و بین A و C می‌باشد، در کدام حالت دو مثلث ABC و AEF متشابه‌اند؟

۱) $AF=۲\ ,\ EB=۵\ ,\ FC=۴\ ,\ AE=۳$

۲) $AF=۴\ ,\ EB=۱۰\ ,\ FC=۶\ ,\ AE=۶$

۳) $AF=۷\ ,\ EB=۳\ ,\ FC=۲\ ,\ AE=۱۰$

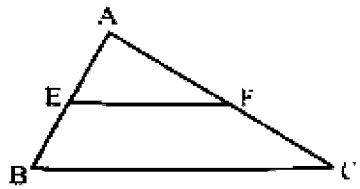
۴) $AF=۱۲\ ,\ EB=۴\ ,\ FC=۸\ ,\ AE=۶$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

یکی از حالتهای تشابه تناسب اضلاع است. $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

که این حالت فقط در مورد گزینه‌ی ۴ برقرار است.

$$AB=AE+EB=۱۰\ ,\ AC=AF+FC=۲۰\ \Rightarrow\ \frac{۶}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲۰}$$



۱۷. اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه ۲ و ۶ واحد است. عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند، فاصله‌ی M از نزدیک‌ترین رأس این مثلث چند واحد است؟

۱) ۷/۵

۲) ۸

۳) $\sqrt{۸۰}$

۴) $\frac{۲۵}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

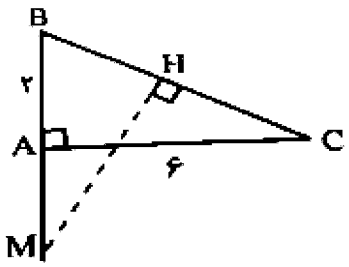
HM عمود منصف است.

$$\hat{A}=۹۰\ \Rightarrow\ BC^۲=AB^۲+AC^۲=۳۶+۴=۴۰\ \Rightarrow\ BC=۲\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow\ BH=HC=\frac{BC}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}\ \ \text{مشترک}\\ \hat{H}=\hat{A}=۹۰\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ BMH\quad ABC\ \Rightarrow\ \frac{BH}{AB}=\frac{BM}{BC}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}=\frac{۲+AM}{۲\sqrt{۱۰}}\ \Rightarrow\ ۲+AM=۱۰\ \Rightarrow\ AM=۸$$



۱۸. مثلث ABC که در آن زاویه‌های $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $S=۲۰\sqrt{۳}$ (مساحت مثلث) با مثلث $A'B'C'$ که در آن $a'=\sqrt{۱۰}$ (ضلع بزرگتر) متشابه است. نسبت تشابه چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\hat{B}=۶۰\ ,\ \hat{A}=۳۰\ \Rightarrow \hat{C}=۹۰$$

$$\sin ۳۰=\frac{a}{c}=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}c$$

$$\sin ۶۰=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \Rightarrow b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}c$$

$$S=\frac{۱}{۲}a\times b=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}c\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}c=\frac{\sqrt{۳}}{۸}c^۲=۲۰\sqrt{۳}\ \Rightarrow c^۲=۱۶۰\ \Rightarrow c=۴\sqrt{۱۰}$$

C وتر مثلث و بزرگترین ضلع آن است. بنابراین با بزرگترین ضلع مثلث $A'B'C'$ یعنی $a'=\sqrt{۱۰}$ متناسب است بنابراین نسبت تشابه $\frac{۴\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=۴$ است.

۱۹. در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$، $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=۲$ اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های رأس A و A' باشند، نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۳) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نسبت مساحت ها در دو مثلث متشابه، مجذور نسبت تشابه است. یعنی:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^۲ \quad \text{یا} \quad \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=۴\ \ (I)$$

در هر مثلث میانه وارد بر یک ضلع مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند. در نتیجه داریم:

$$\text{میانه}\ AM\ \Rightarrow S_{ABM}=S_{AMC}\ \Rightarrow S_{ABC}=۲S_{AMB}$$

$$\text{میانه}\ A'M'\ \Rightarrow S_{A'B'M'}=S_{A'C'M'}\ \Rightarrow S_{A'B'C'}=۲S_{A'C'M'}$$

$$(I)\ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=۴\ \Rightarrow \frac{۲S_{AMB}}{۲S_{A'C'M'}}=۴\ \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}=۴$$

۲۰. کدام دوشکل همواره متشابه نیستند؟

۱)دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین

۲) دو لوزی که یک زاویه‌ی برابر داشته باشند.

۳) دو شش ضلعی منتظم

۴) دو مستطیل

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

در مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین یک زاویه قائمه و دو زاویه‌ی دیگر ۴۵ هستند. بنابراین دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین به حالت تساوی زوایا با هم متشابه‌اند. دو n ضلعی منتظم برای تمام مقادیر $n \geq ۳$ با هم متشابه‌اند. همچنین دو لوزی با یک زاویه‌ی برابر، با هم متشابه‌اند. اما دو مستطیل با تناسب نظیر به نظیر اضلاع با هم متشابه‌اند.

۲۱. سطح کل یک مکعب $۱۸\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع است، قطر مکعب چند سانتیمتر است؟

۱) $۳\sqrt[۳]{۲}$

۲) $۳\sqrt[۴]{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$S = ۶a^۲ = ۱۸\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow a = \sqrt[۴]{۳^۳}$$

$$\text{قطر مکعب} = a\sqrt{۳} = \sqrt[۴]{۳^۳} \times \sqrt{۳} = \sqrt[۴]{۳^۳ \times ۳^۲} = \sqrt[۴]{۳^۵}$$

$$\text{قطر مکعب} = ۳\sqrt[۴]{۳}$$

۲۲. سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ای گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک رأس مشترک باشند، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸

۲) $۱۲\sqrt{۳}$

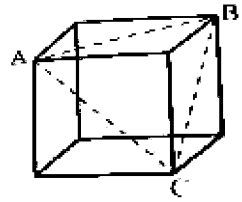
۳) $۱۸\sqrt{۳}$

۴) ۲۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : سطح مقطع مورد نظر مثلث ABC است. طول هر ضلع مثلث مساوی قطر یک وجه مکعب است.

قطر هر وجه، پس $= a\sqrt{۲}$ ضلع مثلث: $= ۶\sqrt{۲}$

مثلث متساوی الاضلاع $= \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{(۶\sqrt{۲})^۲(\sqrt{۳})}{۴} = ۱۸\sqrt{۳}$



۲۳. سطح کل مکعبی به ضلع k با سطح کل مکعب مستطیلی به اضلاع a و $2a$ و $2a$ برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر مکعب مستطیل است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

سطح کل هر مکعب به طول k برابر است با $S=6k^2$ و سطح کل مکعب مستطیل با ابعاد داده شده در شکل زیر عبارت است از:

$$S=2(2a+a)\times 2a+2(2a\times a)=16a^2$$

$$6k^2=16a^2 \rightarrow 3k^2=8a^2 \Rightarrow \sqrt{3}k=2\sqrt{2}a$$

از طرفی قطر مکعب به ضلع k برابر است با : $d=\sqrt{3}k$ و در مکعب مستطیل قطر برابر است با :

$$d'=\sqrt{(2a)^2+a^2+(2a)^2}=\sqrt{9a^2}=3a \Rightarrow \frac{d}{d'}=\frac{\sqrt{3}k}{3a}=\frac{2\sqrt{2}a}{3a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۲۴. مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع القاعده کدام چهار ضلعی نمی‌تواند باشد؟

۱)مستطیل ۲) مربع ۳) لوزی ۴) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : هر صفحه‌ای که منشور را قطع کند چون یال‌های جانبی دو به دو موازی‌اند، آنگاه در چهار ضلعی مقطع، یال‌های مقابل دو به دو موازی هستند. پس مقطع یک متوازی الاضلاع است و ذوزنقه نمی‌تواند باشد.

۲۵. اگر ارتفاع یک استوانه دو برابر و محیط قاعده نصف شود حجم چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : وقتی محیط قاعده را نصف کنیم، آنگاه شعاع نصف می‌شود:

$$R_2=\frac{1}{2}R_1 \quad , \quad h_2=2h_1$$

الف) $V_1=$ سطح قاعده $\times$ ارتفاع $=\pi R_1^2\times h_1$

چون $h_2=2h_1$ پس :

ب) $V_2=\pi R_2^2\times h_2=\pi\left(\frac{1}{2}R_1\right)^2\times 2h_1=\frac{1}{2}\pi R_1^2 h_1$

با مقایسه رابطه‌ی الف و ب نتیجه می‌شود که حجم جسم نصف شده است.

۲۶. حجم هرم منتظمی که قاعده‌ی آن مربع و تمام یال‌هایش به طول a است، برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ است. مقدار a برابر است با :

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\text{قطر قاعده} = a\sqrt{۲}$$

$$OA = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{یال} = SA = a$$

$$\text{ارتفاع} = h = SO = \sqrt{SA^۲ - OA^۲} = \sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \text{(سطح قاعده)} \times \text{ارتفاع}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۶} = \frac{۱}{۳}a^۲ \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = ۱$$

۲۷. هرمی به حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر قاعده‌ی هرم می‌گذرد قطع می‌دهیم. حجم هرم ناقص برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۴}V$ ۲) $\frac{۷}{۸}V$ ۳) $\frac{۸}{۹}V$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}V$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^۳$$

در تست فوق چون ارتفاع هرم کوچک نصف هرم بزرگ می‌باشد.

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{\frac{۱}{۲}h}\right)^۳ \Rightarrow \frac{V}{V'} = ۸$$

$$\text{حجم هرم ناقص} = V - \frac{۱}{۸}V = \frac{۷}{۸}V$$

۸ . در داخل یک مکعب به طول یال a مخروطی با بیش‌ترین حجم ممکن قرار می‌دهیم. حجم مخروط چند برابر حجم مکعب است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۹}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر قطر قاعده مخروط مساوی با ضلع مکعب و ارتفاع مخروط نیز مساوی ضلع مکعب باشد، آنگاه بیش‌ترین حجم را دارد.

$$R=\frac{a}{۲}\ ,\ h=a$$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\text{(سطح قاعده)}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\left(\pi\times\frac{a^۲}{۴}\right)a$$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۱۲}\pi a^۳$$

$$V'_{\text{مکعب}}=a^۳\ \Rightarrow\ \frac{V}{V'}=\frac{\pi}{۱۲}$$

۲۹. اگر اندازه‌ی سطح کره‌ای به شعاع $۲R$ برابر ۹ باشد، اندازه‌ی سطح کره‌ای به شعاع R چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$S=۴\pi R^۲\ \Rightarrow\ ۹=۴\pi(۲R)^۲$$

$$۹=۱۶\pi R^۲\ \Rightarrow\ R=\frac{۳}{۴\sqrt{\pi}}$$

$$S=۴\pi\left(\frac{۳}{۴\sqrt{\pi}}\right)^۲=۴\pi\times\frac{۹}{۱۶\pi}=\frac{۹}{۴}$$

۳۰. عدد اندازه‌ی حجم یک کره ۳ برابر عدد اندازه‌ی مساحت کره است، مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی این کره کدام است؟

۱) ۳۶π ۲) ۴۹π ۳) ۶۴π ۴) ۸۱π

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : دایره‌ی عظیمه کره، دایره‌ای است که شعاع آن مساوی شعاع کره می‌باشد.

$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\text{مساحت کره}=۴\pi R^۲$$

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳=۳\times۴\pi R^۲\ \Rightarrow\ R=۹$$

$$\text{دایره عظیمه}\ S=\pi R^۲=۸۱\pi$$

۳۱. کدامیک ازنقاط زیر از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

۱)نقطه تلاقی سه میانه ۲)نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع

۳) نقطه‌ی تلاقی سه عمود منصف ۴) نقطه‌ی تلاقی سه نیم ساز

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

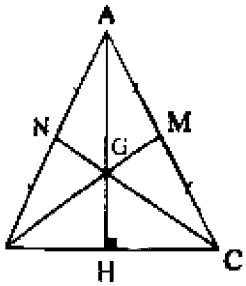
هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه‌ی مثلث از دو ضلع آن به یک فاصله است. از طرفی می‌دانیم نیم سازهای داخلی سه زاویه‌ی مثلث همرسند، لذا فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی نیم سازهای هر مثلث از سه ضلع مثلث برابرند.

۳۲. مساحت مثلث ABC که طول سه میانه‌ی آن ۵ و ۵ و ۸ است چقدر است؟

۱)۱۲ ۲) ۹ ۳) ۲۶ ۴) ۱۶

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مثلثی که طول دو میانه‌ی آن با هم برابر باشد، متساوی الساقین است. (اثبات کنید). پس با توجه به شکل و طول سه میانه‌ی داده شده داریم:



$$\begin{cases} BG = CG = \frac{۲}{۳}BM = \frac{۲}{۳}(۵) = \frac{۱۰}{۳} \\ GH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}(۸) = \frac{۸}{۳} \end{cases}$$

در مثلث قائم الزاویه‌ی BGH قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BH^۲ = BG^۲ - GH^۲ = \frac{۱۰۰}{۹} - \frac{۶۴}{۹} = \frac{۳۶}{۹} = ۴ \Rightarrow BH = ۲ \Rightarrow BC = ۲BH = ۴$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH.BC = \frac{۱}{۲}(۸)(۴) = ۱۶$$

۳۳. نیم‌سازهای داخلی زوایای متوازی‌الاضلاع همواره از تقاطع با یکدیگر، کدامیک از اشکال زیر را می‌سازند؟

۱)مربع ۲) لوزی ۳) مستطیل ۴) ذوزنقه

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : چهار ضلعی حاصل از تقاطع نیم سازهای داخلی زوایای متوازی الاضلاع، همواره یک مستطیل است.

۳۴. سه پاره خط به طول‌های $۴x-۴$ و $x+۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$ ۲) $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

درهر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

$$۴x-۴<(x+۷)+۶x \Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳}$$

$$x+۷<(۴x-۴)+۶x \Rightarrow ۹x>۱۱ \Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹}$$

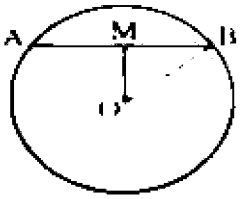
$$۶x<(۴x-۴)+(x+۷) \Rightarrow x<۳$$

از اشتراک جواب‌ها داریم: $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$

۳۵. از نقطه‌ی M به فاصله‌ی $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره‌ی $C(O,R)$ می‌نیمم وتری در دایره رسم نموده‌ایم، طول این می‌نیمم وتر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}R$ ۲) $\sqrt{۲}R$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : کوتاه‌ترین وتری که از M داخل دایره در دایره رسم می‌شود، وتری است که از نقطه‌ی M بر MO عمود می‌شود، چون از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آنرا نصف می‌کند.

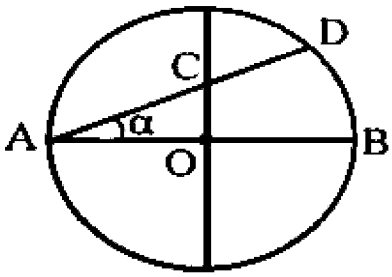


$MA=MB$

$$MOB: MB^۲=BO^۲-MO^۲=R^۲-\left(\frac{R}{۲}\right)^۲=\frac{۳}{۴}R^۲$$

$$MB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow AB=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)R=R\sqrt{۳}$$

۳۶. در شکل مقابل دو قطر دایره عمود بر هم‌اند، نسبت $\frac{CD}{CA}$ کدام است؟



۱) $2\sin^2\alpha$

۲) $2\cos^2\alpha$

۳) $\cos 2\alpha$

۴) $\sin 2\alpha$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون دو قطر بر هم عمودند، پس $AC=CB$ و $\hat{A}=\hat{B}=\alpha$. چون زاویه C زاویه خارجی مثلث ACB می‌باشد، $\hat{C}=2\alpha$ زاویه Dمحاطی روبروی قطر است، پس $\hat{D}=90$

$$CDB : \cos 2\alpha=\frac{CD}{CB}$$

به جای CA , CB را قرار می‌دهیم. $\cos 2\alpha=\frac{CD}{CA}$

۳۷. دو دایره‌ی مساوی C_1 و C_2 مماس خارج هستند. از نقاط روی دایره‌ی C_1 دایره‌ی C_2 با زاویه‌ی α دیده می‌شود. کوچک‌ترین مقدار α کدام است؟

۱) $2\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{3}$

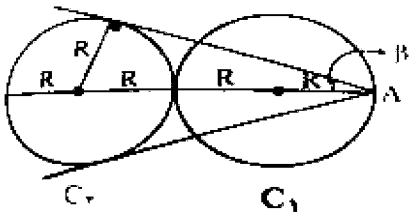
۲) $2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{2}$

۳) $2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{3}$

۴) $2\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

هر چه نقطه دورتر از دایره باشد، آنگاه زاویه‌ی α کوچکتر خواهد بود. پس با توجه به شکل داریم:



$$\sin\beta=\frac{R}{3R}=\frac{1}{3} \Rightarrow \beta=\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha=2\beta=2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{3}$$

۳۸. در دو دایره‌ی مماس خارج به شعاع R و r طول مماس مشترک خارجی چه قدر است؟

۱) $۲\sqrt{rR}$ ۲) $R+r$ ۳) $\sqrt{R^۲+r^۲}$ ۴) $R^۲+r^۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

طول مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

چون دو دایره مماس خارج‌اند $d=OO'=R+R'=R+r$

$$TT'=\left(\sqrt{(R+r)^۲-(R-r)^۲}\right)=\sqrt{۴Rr}=۲\sqrt{Rr}$$

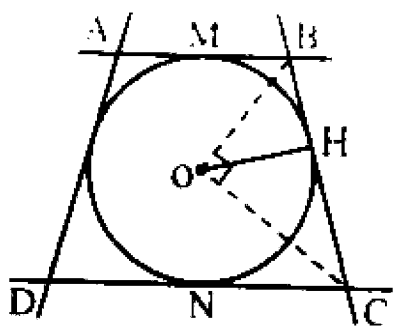
۳۹. ذوزنقه‌ی متساوی الساقین $(AD=BC)ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. کدام رابطه صحیح است؟

۱) $AB\times DC=۲R^۲$ ۲) $AB^۲+AC^۲=۴R^۲$

۳) $AB+CD=۴R$ ۴) $AB\times CD=۴R^۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نقطه O را به B و C وصل می‌کنیم. چون ذوزنقه متساوی الساقین است. پس:



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰$$

$$\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰ \Rightarrow \hat{O}=۹۰$$

(خط OB و OC نیمساز زاویه‌ی بین دو مماس هستند.)

در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه وتر است.

$$OH^۲=R^۲=HB\times HC=BM\times CN$$

$$R^۲=\left(\frac{AB}{۲}\right)\times\left(\frac{DC}{۲}\right) \Rightarrow AB\times DC=۴R^۲$$

۴۰. در مورد ذوزنقه‌ی متساوی الساقین کدام گزینه درست است؟

۱)نه محاطی است و نه محیطی

۲) فقط محیطی است.

۳) هم محاطی و هم محیطی است.

۴) فقط محاطی است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نکته ۱: اگر در یک چهار ضلعی دو زاویه مقابل مکمل باشند، آنگاه چهار ضلعی محاطی است و برعکس.

نکته ۲: اگر در یک چهار ضلعی مجموع دو ضلع مقابل مساوی با مجموع دو ضلع مقابل دیگر باشد، آنگاه چهار ضلعی محیطی است و برعکس.

در ذوزنقه متساوی الساقین زاویه‌های مقابل مکمل‌اند، زیرا:

چون ذوزنقه متساوی الساقین است $\hat{A}=\hat{B},\ \hat{D}=\hat{C}$ و چون $AB\ \ CD$ ، $\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰$

$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰\ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰$ پس ذوزنقه‌ی متساوی الساقین محاطی است ولی محیطی نمی‌تواند باشد. زیرا در حالت کلی:

$AB+DC\neq AD+BC$

۴۱. در یک هشت ضلعی منتظم اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. مساحت شکل جدید چندبرابر هشت ضلعی اولیه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

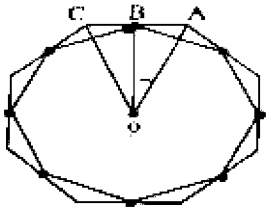
۲) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم که هر هشت ضلعی منتظم درون دایره‌ای محاط است. پس با توجه به شکل، نسبت مساحت هشت ضلعی‌های منتظم مورد نظر برابر است با مربع نسبت شعاع‌های دوایر محیطی آنها. پس اگر O مرکز دایره‌ی محیطی موردنظر باشد، آنگاه داریم:



$$A\hat{O}C=\frac{۳۶۰}{۸}=۴\Rightarrow A\hat{O}B=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵\ \Rightarrow \frac{OB}{OA}=\cos ۲۲/۵$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت شکل جدید}}{}=\left(\frac{OB}{OA}\right)^{۲}=\cos^{۲} ۲۲/۵\ =\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

توجه: با استفاده از روابط زیر می‌توانید $\cos^{۲} ۲۲/۵$ را محاسبه کنید:

$$\begin{cases}\sin ۴۵^\circ=۲\sin ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \sin^{۲} ۲۲/۵^\circ+\cos^{۲} ۲۲/۵^\circ=۱\end{cases}$$

۴۲. در مثلث ABV طول $BC=۴$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ ماکزیمم مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نکته : بین چند ضلعی‌هایی که داخل یک دایره محاط می‌باشند، آن چند ضلعی بیشترین مساحت را دارد که منتظم باشد. این تست نشان می‌دهد که مثلث ABC داخل یک دایره محاط می‌باشد،یعنی رأس A روی کمان در خور زاویه ۶۰° تحت پاره خط BC می‌باشد، پس در صورتی مساحت ماکزیمم است که مثلث متساوی الاضلاع باشد:

$S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ مثلث متساوی الاضلاع

$S=\frac{۱۶\times\sqrt{۳}}{۴}=۴\sqrt{۳}$

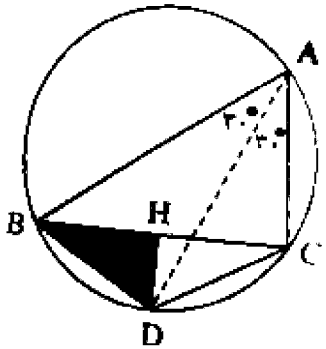
۴۳. دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه متحرک A سه رأس مثلث‌اند، اگر $BC=۶$ ، $\hat{A}=۶۰$ و نیمساز زاویه‌ی A همواره از نقطه‌ی ثابتی مانند D، بگذرد فاصله‌ی D از نقطه‌ی B چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مکان هندسی نقطه‌ی A کمان در خور زاویه‌ی $\hat{A}=۶۰$ روبرو به پاره خط $BC=۶$ است. نیمساز زاویه‌ی A از نقطه‌ی ثابت D وسط کمان BC می‌گذرد.

مثلث BDC متساوی الساقین است لذا ارتفاع DH وتر BC را نصف می‌کند.



حال در مثلث قائم الزاویه‌ی BHD با توجه به این که $D\hat{B}H=۳۰$ است، داریم:

$DH=\frac{BC}{۲}, BH=۳\Rightarrow BD^۲=BH^۲+DH^۲\Rightarrow BD^۲=۹+\frac{BD^۲}{۴}\Rightarrow BD^۲=۱۲\Rightarrow BD=۲\sqrt{۳}$

۴۴. خط $y=۲x+۱$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۱\,,\,y+k)$ منتقل کرده‌ایم، معادله‌ی شکل حاصل $y=۲x-۱$ است، k کدام است؟

۱) $k=-۴$ ۲) $k=۰$ ۳) $k=-۲$ ۴) $k=۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$T(x,y)=(x+۱,y+k) \Rightarrow \begin{cases} x=X-۱ \\ y=Y-k \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y-k=۲(X-۱)+۱ \Rightarrow Y=۲X+k-۱$$

$$\Rightarrow k-۱=-۱ \Rightarrow k=۰$$

۴۵. کدام گزینه درست نیست؟

۱)نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای متقاطع یک دوران است.

۲) نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای موازی یک دوران است.

۳) نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آن بر هم عمود است، تقارن مرکزی است.

۴) نتیجه‌ی ترکیب سه تقارن مرکزی متمایز، تقارن مرکزی است.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای موازی، یک انتقال است.

نتیجه‌ی دو تقارن محوری، با محورهای متقاطع، یک دوران به مرکز محل برخورد دو محور و زاویه‌ی دو برابر زاویه‌ی بین آن دو است.

$$OA_۱=OA_۲\ ,\ OA_۲=OA_۳ \Rightarrow OA_۱=OA_۳$$

$$A_۱\hat{O}A_۳=۲\alpha$$

فرض کنید $O_۱,O_۲,O_۳$ سه مرکز تقارن است. اگر به طور متوالی، قرینه‌ی $A_۱$ نسبت به این مراکز را به دست آوریم، به نقطه‌ی $A_۴$ می‌رسیم حال می‌توان به طور مستقیم از $A_۱$ به $A_۲$ رسید. چون $O_۱,O_۲,O_۳$ سه نقطه‌ی ثابت هستند، $O_۴$ نیز یک نقطه ثابت است. این چهار نقطه اوساط چها ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ هستند بنابراین $A_۴$ قرینه‌ی $A_۱$ نسبت به مرکز $O_۴$ است.

۴۶. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متجانس‌اند، اگر نسبت تجانس k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با :

۱) $k^۲$ ۲) k ۳) $-k$ ۴) $|k|$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

تجانس، طول را k برابر و مساحت را $k^۲$ برابر می‌کند.

۴۷. مجانس‌های یک شکل نسبت به یک مرکز و با دو نسبت مختلف K', K خود نیز مجانس یکدیگرند نسبت تجانس این دو شکل کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{K}{K'}$ ۲) KK' ۳) $K+K'$ ۴) $2KK'$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

M'' مجانس M تحت مرکز O و نسبت Kاست. M' مجانس M تحت مرکز Oونسبت K' است. حال داریم.

$$\frac{OM''}{OM}=K\ ,\ \frac{OM'}{OM}=K' \Rightarrow \frac{\frac{OM''}{OM}}{\frac{OM'}{OM}}=\frac{K}{K'} \Rightarrow \frac{OM''}{OM'}=\frac{K}{K'}$$

M'' مجانس M' با مرکز O و نسبت $\frac{K}{K'}$ است.

۴۸. کدام گزینه غلط است؟

۱)هر خط که با یک خط از صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است.

۲) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با هر خط در آن صفحه موازی است.

۳) هر صفحه با دو خط متقاطع مشخص می‌شود.

۴) دو خط عمود بر یک صفحه، موازی‌اند.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

گزینه‌های ۱و۳و۴ صورت قضایای کلی و یا نتایج آنها هستند که در متن کتاب درسی موجود است و در مورد گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم خط d با صفحه‌ی p موازی باشد، دراین صورت بی‌شمار خط در صفحه ی p موجودند که با خط d وضعیتی نامشخص دارند.

۴۹. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی که دوسر آن‌ها بر دو صفحه‌ی موازی واقع‌اند کدام است؟

۱)صفحه‌ای عمود بر دو صفحه ۲) صفحه‌ای موازی دو صفحه

۳) خطی موازی دو صفحه ۴) خطی عمود بر دو صفحه

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : مکاه هندسی وسط پاره خط‌هایی که دو سر آنها بر دو صفحه‌ی موازی واقع‌اند، صفحه‌ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن‌هاست.

برای آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد:

۱)کافی است بر دو خط متقاطع آن صفحه عمود باشد. ۲) بایدبر همه‌ی خطوط صفحه عمود باشد.

۳) کافی است بر دو خط متوازی صفحه عمود باشد. ۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر خطی بر دو خط غیر موازی از صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط دیگر آن صفحه و در نتیجه بنا به تعریف بر آن صفحه عمود است.

۵۰. اگر صفحه‌ی p بر دو خط d و AB عمود باشد، آنگاه:

۱) d عمودمنصف AB است.
۲) AB و d در یک صفحه قرار دارند.
۳) AB و d به هم عمودند.
۴) AB موازی d است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

۵۱. کره‌ای در نقاط A , B بر وجوه یک فرجه مماس است، اندازه‌ی زاویه‌ی یال این فرجه با خط AB کدام است؟

۱) صفر درجه
۲) ۳۰ درجه
۳) ۶۰ درجه
۴) ۹۰ درجه

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :مطابق شکل زیر، دایره‌ی عظیمه‌ی گذرا از دو نقطه‌ی A و B از کره در صفحه‌ای عمودبر فصل مشترک P و Q قرار دارد، بنابراین خط δ یعنی فصل مشترک P و Q بر هر خط این صفحه از جمله وتر AB عمود است.

۵۲. نقاط $A=(۱,۲,۳)$, $B=(۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند. طول تصویر قائم پاره خط AB روی صفحه xoy چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶۱}$
۲) ۵
۴) $۵\sqrt{۲}$
۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : کافی است تصویر قائم نقاط A و B را روی صفحه‌ی xoy به دست آورده و فاصله‌ی آن‌ها را از یکدیگر حساب کنیم.

تصویر قائم روی صفحه xoy

$$\begin{cases} A=(۱,۲,۳)\Rightarrow A'(۱,۲,۰) \\ B=(۴,۶,-۳)\Rightarrow B'(۴,۶,۰) \end{cases}$$

تصویر قائم روی صفحه‌ی xoy

$$\Rightarrow |A'B'|=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۶-۲)^۲}=۵$$

۵۳. اگر دو بردار $V_۱=(۲,۱,m+۱)$ و $V_۲=(-۱,۲k,۱)$ موازی باشند، آنگاه m و k برابر است با:

۱) $\begin{cases} m=-۳ \\ k=\frac{-۱}{۴} \end{cases}$
۲) $\begin{cases} m=-۳ \\ k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$
۳) $\begin{cases} m=۳ \\ k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$
۴) $\begin{cases} m=۳ \\ k=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : زمانی دو بردار غیر صفر موازیند که مضرب یکدیگر باشند. یعنی داریم:

$$V_۱ \quad V_۲ \Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{۱}{۲k}=\frac{m+۱}{۱} \Rightarrow k=-\frac{۱}{۴} \ , \ m+۱=-۲ \Rightarrow m=-۳$$

۵۴. ضرب درونی بردارها در فضا کدام ویژگی را دارد؟

۱) بسته بودن
۲) جابجایی
۳) شرکت‌پذیری
۴) عضو خنثی

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : ضرب درونی (داخلی) بردارها خاصیت جابجایی دارد. خاصیت بسته بودن ندارد چون ضرب داخلی دو بردار، عدد است و بردار نیست. خاصیت شرکت پذیری ندارد چون ضرب داخلی سه بردار تعریف نمی‌شود، چون ضرب دو تا از آن‌ها عدد می‌شوند و ضرب داخلی این عدد در بردار سوم معنی ندارد. عضو خنثی نیز ندارد، یعنی برداری وجود ندارد که در یک بردار دیگر ضرب داخلی شود و حاصل همان بردار شود.

۵۵. اگر اندازه‌ی دو بردار $\vec{V_1}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}+4\vec{k}$ و $\vec{V_2}=a\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ برابر باشند، کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار کدام است؟

۱) $\frac{16}{29}$ ۲) $\frac{24}{29}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ۴) $\frac{28}{29}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$|V_1|=|V_2| \Rightarrow \sqrt{4+(a+1)^2+16}=\sqrt{a^2+16+9}$$

$$\Rightarrow 20+a^2+2a+1=a^2+25 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow V_1=(2,3,4), V_2=(2,4,3) \Rightarrow \cos\theta=\frac{V_1.V_2}{|V_1||V_2|}=\frac{4+12+12}{\sqrt{4+9+16}\times\sqrt{4+16+9}}=\frac{28}{29}$$

۵۶. قرینه بردار $(1,-3,2)$ نسبت به امتداد بردار $(1,2,0)$ ، کدام بردار است؟

۱) $(-3,-1,-2)$ ۲) $(-1\ -2\ 2)$ ۳) $(0,5,-2)$ ۴) $(1,7,-2)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$a''=2\left(\frac{a.b}{b.b}\right)b-a=2\left(\frac{1-6+0}{1+4+0}\right)(1,2,0)-(1,-3,2)$$

$$a''=(-2,-4,0)-(1,-3,2) \Rightarrow a''=(-3,-1,-2)$$

۵۷. کسینوس‌های هادی بردار $a=(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$ کدام‌اند؟

۱) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ۲) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{45}\right)$ ۳) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$ ۴) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : $|a|=\sqrt{3+1+12}=4$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|}=\frac{\sqrt{3}}{4}\ ,\ \cos\beta=\frac{a_y}{|a|}=\frac{1}{4}\ ,\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|a|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow e_a=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

۵۸. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد حاصل ضرب دو بردار صحیح است؟

۱)حاصل ضرب درونی دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۲) حاصل ضرب بیرون دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۳) اگر حاصل ضرب بیرونی دو بردار صفر باشد، همواره یکی از بردارها صفر است.

۴)اگر حاصل ضرب درونی دو بردار صفر باشد، همواره یکی از بردارها صفر است.

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : حاصل ضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۵۹. طول حاصل ضرب بیرونی دو بردار $\vec{V}_1(0,1,2)$ و $\vec{V}_2(-1,1,0)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۱» :

$$\begin{cases} V_1=(0,1,2) \\ V_2=(-1,1,0) \end{cases} \Rightarrow V_1\times V_2=(-2,-2,1) \Rightarrow |V_1\times V_2|=\sqrt{4+4+1}=3$$

۶۰. مساحت متوازی الاضلاعی که سه رأسش نقاط $O(0,0,0)$ و $A(1,2,3)$ و $B(1,-2,1)$ باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{21}$ ۲) $2\sqrt{7}$ ۳) $2\sqrt{21}$ ۴) $3\sqrt{72}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : ابتدا دو بردار دلخواه اضلاع آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} OA=(1,2,3) \\ OB=(1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow AB\times OB=(8,2,-4) \Rightarrow S=|OA\times OB|=\sqrt{64+4+16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

۶۱. به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(1,2,m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0,-1,2)$ و $(2,3,-1)$ نوشت؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : لازم و کافی است که حاصلضرب مختلط سه بردار داده شده صفر باشد زیرا اگر یک بردار ترکیب خطی از دو بردار دیگر باشد، آن گاه هر سه بردار در یک صفحه قرار می‌گیرند.

$$a.(b\times c)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2m+3=0 \Rightarrow 2m=-3 \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

۶۲. اگر a , b دو بردار یکه باشند که با هم زاویه‌ی $\frac{\pi}{3}$ می‌سازند، طول بردار $3a-2b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{13}$ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) ۷ ۴) $\sqrt{10}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : چون a , b دو بردار یکه هستند، بنابراین $|a|=|b|=1$ است.

$$|3a-2b|^2=(3a-2b).(3a-2b)=9a.a-6a.b-6b.a+4b.b=9|a|^2-12a.b+4|b|^2$$

$$=9-12\times1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}+4=7 \Rightarrow |3a-2b|=\sqrt{7}$$

نکته‌ی درسی:

۱) $|a|^2=a.$

۲) $a.(b+c)=a.b+a.c$

۳) $a.b=b.a$

۶۳. اگر بردارهای $a=(-۲,۱,۱)$ و $d=(۱,-۲,۲)$ به ترتیب، ضلع و قطر یک متوازی الاضلاع باشند، مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) ۵۰ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

اگر بردار b ، ضلع دیگر متوازی الاضلاع باشد، برای بردار d ، می‌توان چهار حالت $d=\pm(a+b)$ و $d=\pm(a-b)$ را در نظر گرفت که در هر چهار حالت، جواب مسأله یکسان است. (چرا؟) با فرض $d=a+b$ داریم:

$$S=|a\times b|, d=a+b \Rightarrow b=d-a$$

$$\Rightarrow S=|a\times(d-a)|=|a\times d-o|=|a\times d|$$

$$a\times d=(-۲,۱,۱)\times(۱,-۲,۲)=(۴,۵,۳) \Rightarrow S=|a\times d|=\sqrt{۱۶+۲۵+۹}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

۶۴. معادله‌ی خط عمود بر دو محور y و z به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases} x=a \\ x+y=b \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x=۰ \\ y=z \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} y=b \\ z=a \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x=a \\ z+y=b \end{cases}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : بردار هادی خط‌هایی که بر هر دو محور y و z عمودند، به صورت $u=(a,۰,۰)$ است، پس در معادله‌ی این خط مقدار y و z ، به صورت عدد ثابت بیان می‌شوند، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۶۵. دو خط $d:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{۳}$ و $d':\begin{cases} x=۲t+۴ \\ y=t+۲ \\ z=۳t+۶ \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱)بر هم عمودند ۲) موازی‌اند ۳) برهم منطبق‌اند ۴) متقاطع‌اند

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول: از جای گذاری معادلات پارامتری خط d' در معادلات متقارن خط d داریم:

$$\frac{(۲t+۴)-۲}{۲}=\frac{(t+۲)-۱}{۱}=\frac{(۳t+۶)-۳}{۳} \Rightarrow \frac{۲t+۲}{۲}=\frac{t+۱}{۱}=\frac{۳t+۳}{۳}$$

$$\Rightarrow t+۱=t+۱=t+۱ \Rightarrow ۱=۱=۱ \Rightarrow$$ دو خط بر هم منطبق‌اند

راه حل دوم، دو خط d و d' با هم موازی‌اند $(u_d=u_{d'})$. برای بررسی انطباق دو خط، نقطه‌ی دلخواهی مانند $A=(۴,۲,۶)$ ، را روی خط d' در نظر می‌گیریم. اگر مختصات این نقطه در معادلات خط d صدق کند دو خط بر هم منطبق‌اند، در غیر این صورت موازی متمایزند.

$$A=(۴,۲,۶), d:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{۳} \Rightarrow \frac{۴-۲}{۲}=\frac{۲-۱}{۱}=\frac{۶-۳}{۳} \Rightarrow ۱=۱=۱ \Rightarrow$$

۶۶. فاصله‌ی دو خط موازی $(x+y=۱\ ,\ z=۱)$ و $(x+y=۳\ ,\ z=۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$L:\begin{cases}x+y=۱\\z=۱\end{cases}\Rightarrow A=(۰,۱,۱)\in L,\ L':\begin{cases}x+y=۳\\z=۳\end{cases}\Rightarrow B=(۰,۳,۳)\in L'$$

بردار $u=(۱,-۱,۰)$ با هر دو خط L',L موازی است، پس :

$$AB=(۰,۲,۲)\ \Rightarrow\ h=\frac{|AB\times u|}{|u|}=\frac{|(۲,۲,-۲)|}{|(۱,-۱,۰)|}=\frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}$$

۶۷. معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(۱,۱,۱)$ به موازات صفحه‌ی $x+۲y+۳z=۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $x+y+z=۳$ ۲) $x+۲y+۳z=-۶$

۳) $x+۲y+۳x-۶=۰$ ۴) $x-۲y+z=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$P:x+۲y+۳z=۰\ \Rightarrow\ n_p=n_Q=(۱,۲,۳)\ ,\ A=(۱,۱,۱)\in Q$$

$$\Rightarrow Q:۱(x-۱)+۲(y-۱)+۳(z-۱)=۰\ \Rightarrow\ x+۲y+۳z-۶=۰$$

۶۸. معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط $\begin{cases}x=t\\y=۲t+۱\\z=t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=t\\y=t+۱\\z=۲t\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x-y-۳z+۱=۰$ ۲) $x-۳y+z+۳=۰$

۳) $۳x-y-z+۱=۰$ ۴) $x-y-z+۱=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$L:\begin{cases}x=t\\y=۲t+۱\\z=t\end{cases}\ \Rightarrow\ u=(۱,۲,۱)\ ,\ L':\begin{cases}x=t\\y=t+۱\\z=۲t\end{cases}\ \Rightarrow\ u'=(۱,۱,۲)$$

دو خط L',L متقاطع‌اند، پس بردار نرمال صفحه‌ی شامل این دو خط را به صورت $n_p=u\times u'$ در نظر می‌گیریم.

$$n_P=\begin{vmatrix}i & j & k\\۱ & ۲ & ۱\\۱ & ۱ & ۲\end{vmatrix}=(۳,-۱,-۱)\ \ ,\ \ A=(۰,۱,۰)\in L\ \Rightarrow\ A\in P$$

$$\Rightarrow\ P:۳(x-۰)-۱(y-۱)-۱(z-۰)\ \Rightarrow\ P:۳x-y-z+۱=۰$$

۶۹. معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی $۲x+۳y+۴z+۵=۰$ و $x+y+z+۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{y-۳}{۲}=x-۲=z$

۲) $\frac{y+۳}{۲}=x-۲=-z$

۳) $\frac{-y-۳}{۲}=x-۲=z$

۴) $\frac{y+۳}{۲}=x-۲=z$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول :

$$\begin{cases} P:۲x+۳y+۴z+۵=۰ \Rightarrow n=(۲,۳,۴) \\ P':x+y+z+۱=۰ \Rightarrow n'=(۱,۱,۱) \end{cases}$$

بردار هادی فصل مشترک P و P' ، $u=n\times n'=(-۱,۲,-۱)$ است که تنها با بردار هادی گزینه‌ی ۳ موازی است.

راه حل دوم:

$$\begin{cases} P:۲x+۳y+۴z=۵=۰ \\ P':x+y+z+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P:۲x+۲y+۴z+۵=۰ \\ P':-۲x-۲y-۲z-۲=۰ \end{cases} , \begin{cases} P:۲x+۳y+۴z+۵=۰ \\ P':-۳x-۳y-۳z-۳=۰ \end{cases}$$

$$y+۲z+۳=۰ \quad (۱) \qquad -x+z+۲=۰ \quad (۲)$$

جمع دو معادله :

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} y+۲z+۳=۰ \Rightarrow \frac{-۳-y}{۲} \\ -x+z+۲=۰ \Rightarrow z=x-۲ \end{cases} \Rightarrow x-۲=\frac{-۳-y}{۲}=z$$

۷۰. صفحه‌ی $P:۲x+y-z+۲=۰$ و دو نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ و $B(۳,۱,۲)$ مفروضند. کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

۱) A و B در یک طرف P قرار دارند.

۲) P از وسط AB می‌گذرد.

۳) A و B در دو طرف P قرار دارند.

۴) A روی P قرار دارد.

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$P:۲x+y-z+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} P(A)=۲+۲-۳+۲=۳ \\ P(B)=۶+۱-۲+۲=۷ \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A).P(B)>۰$ B , A در یک طرف صفحه‌ی P قرار دارند.

۷۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۱,۱)$ از صفحه‌ی P به معادله‌ی $۲x+۳y+z-۱=۰$ برابر است با:

۱) $\frac{۵\sqrt{۱۴}}{۱۴}$

۲) $\frac{۱۴\sqrt{۵}}{۵}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$

۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} A=(۱,۱,۱) \\ P:۲x+۳y+z-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow D=\frac{|۲+۳+۱-۱|}{\sqrt{۴+۹+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۵\sqrt{۱۴}}{۱۴}$$

۷۲. صفحه‌ی شامل دو خط موازی $(x=۲t+۱, y=t-۱, z=t)$ و $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z-۲}{۱}$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

ابتدا دسته‌ی صفحه‌های شامل خط $L:\frac{x}{۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z-۲}{۱}$ را می‌نویسیم:

$$\frac{L:\begin{cases}x=۲y=۰\\ z-y=۲\end{cases}}{P:mx-(۲m+۱)y+z=۲}$$

از طرفی، نقطه‌ی دلخواهی مانند $A=(۱,-۱,۰)$ را روی خط $L':\begin{cases}x=۲t+۱\\ y=t-۱\\ z=t\end{cases}$ در نظر می‌گیریم، پس :

$$A\in L' \Rightarrow A\in P \Rightarrow m(۱)-(۲m+۱)(-۱)+۰=۲ \Rightarrow ۳m=۱ \Rightarrow m=\frac{۱}{۳}$$

$$P:\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۳}y+z=۲ \xrightarrow{y=z=۰} \frac{۱}{۳}x=۲ \Rightarrow x=۶$$

۷۳. اگر خط به معادلات $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-b}{a}=\frac{z}{۱}$ بر صفحه‌ای به معادله‌ی $۲x+y-۳z=۴$ واقع شود، دو تایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۱,-۲)$ ۴) $(-۱,-۲)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-b}{a}=\frac{z}{۱}=t \Rightarrow L:(x=۲t+۱\ ,\ y=at+b\ ,\ z=t)$$

اگر خط L به تمامس در صفحه‌ی $P:۲x+y-۳z-۴=۰$ قرار داشته باشد، باید معادلات پارامتری خط L در معادله‌ی صفحه‌ی P صدق کند، پس:

$$L\subset P \Rightarrow ۲(۲t+۱)+(at+b)-۳(t)-۴=۰ \Rightarrow (a-۱)t+(b-۲)=۰$$

برای آن که معادله‌ی اخیر به ازای همه‌ی مقادیر t برقرار باشد، لازم و کافی است که:

$$\begin{cases}a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱\\ b-۲=۰ \Rightarrow b=۲\end{cases} \Rightarrow (a,b)=(-۱,۲)$$

۷۴. قرینه‌ی صفحه‌ی $x-y+z-۲=۰$ نسبت به صفحه‌ی xoy کدام است؟

۱) $-x+y+z-۲=۰$ ۲) $x+y+z-۲=۰$

۳) $-x+y+z+۲=۰$ ۴) $x+y+z+۲=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : در قرینه یابی نسبت به صفحه xoy ، علامت z قرینه می‌شود، بنابراین:

$$P:x-y+z-۲=۰ \Rightarrow P':x-y-z-۲=۰ \text{ or } P'=-x+y+z+۲=۰$$

۷۵. کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط به معادلات $D:(x=۰\,,\,y=۵)$ و $D':\left(z=۰,\frac{x}{۳}=\frac{y}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

طول عمود مشترک دو خط متنافر $L:\begin{cases}ax+by+c=۰\\z=z_۰\end{cases}$ و $L':\begin{cases}x=x_۰\\y=y_۰\end{cases}$ برابر $h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است، بنابراین:

$$L:\begin{cases}\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}\\z=۰\end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases}۴x-۳y=۰\\z=۰\end{cases}\ ,\ L':\begin{cases}x=۰\\y=۵\end{cases} \Rightarrow h=\frac{|۴(۰)-۳(۵)+۰|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

۷۶. شعاع دایره‌ای که از دونقطه‌ی $(۱,۲)$ و $(۳,۰)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=۲x-۱$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون دایره از دو نقطه‌ی $A=(۱,۲)$ و $B=(۳,۰)$ می‌گذرد، مرکز آن روی عمود منصف پاره خط AB قرار دراد.

$$\begin{cases}A=(۱,۲)\\B=(۳,۰)\end{cases} \Rightarrow AB$$

وسط پاره خط $M=(۲,۱), m_{AB}=-۱$ عمودمنصف $=۱$

عمود منصف AB $\Delta:y-۱=۱(x-۲) \Rightarrow \Delta:y=x-۱$

$$\begin{cases}y=x-۱\\y=۲x-۱\end{cases} \Rightarrow$$

مرکز دایره $:O'=(۰,-۱)$

شعاع دایره $=|O'B|=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$

۷۷. دایره‌ی $x^2+y^2+4x+y+1=0$ از مبدأ مختصات به زاویه‌ی α و دایره‌ی $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ از مبدأ مختصات به زاویه‌ی β دیده می‌شود. کدام رابطه‌ی بین α و β درست است؟

۱) $\alpha<\beta$ ۲) $\alpha>\beta$ ۳) $\alpha=\beta$ ۴) $\beta=2\alpha$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : فرض کنیم از مبدأ مختصات، دو مماس OT_1 و OT_1' بر دایره‌ی $C_1=x^2+y^2-2x-4y+4=0$ رسم شده باشد، مطابق شکل داریم:

$$C_1: x^2+y^2-2x-4y+4=0 \Rightarrow C_1:(x-1)^2+(y-2)^2=1$$

$$\Rightarrow \omega_1(1,2) \Rightarrow O\omega_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\ ,\ R_1=1$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{O\omega_1T_1}: \sin\frac{\beta}{2}=\frac{R_1}{O\omega_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$$

با نظیر همین استدلال، داریم:

$$C_2=x^2+y^2+4x+y+1=0 \Rightarrow C_2:(x+2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2\left(-2,\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow O\omega_2=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}, R_2=\frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_2}{O\omega_2}=\sqrt{\frac{13}{17}}$$

چون $\sin\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\beta}{2}$ ، پس $\frac{\alpha}{2}>\frac{\beta}{2}$ و در نتیجه $\alpha>\beta$.

۷۸. معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+4$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2+3x-2y=0$ ۲) $x^2+y^2+2x-2y=1$

۳) $x^2+y^2-2x+y=1$ ۴) $x^2+y^2+2x-y=2$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : مختصات مرکز دایره را به صورت $\omega(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم، چون دایره بر دو خط به معادلات $y-x=0$ و $y-x-4=0$ مماس است، پس فاصله‌ی مرکز آن از این دو خط با هم برابر است.

$$\frac{|\beta-\alpha|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\beta-\alpha-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow |\beta-\alpha|=|\beta-\alpha-4| \xrightarrow{\alpha=-1} |\beta+1|=|\beta-3| \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\beta+1=+(\beta-3)\\ \beta+1=-(\beta-3) \Rightarrow \beta=1\end{cases}$$ غیرقابل قبول

و شعاع دایره، برابر با فاصله‌ی مرکز، از خط مماس بر دایره است، داریم:

$$\begin{cases}\omega(-1,1)\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow R=\frac{|-1-1|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$$

۷۹. معادله‌ی دایره‌ی مماس داخلی با دایره‌ی $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\left(۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}\right)^۲$ که مرکزش $(۲\alpha,۲\beta)$ است، کدام است؟

۱) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۱۶}$

۲) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۹}$

۳) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۴}$

۴) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$|OO'|=|R-R'|$: شرط مماس داخل بودن

$$\begin{cases} O=(\alpha,\beta) \\ O'=(۲\alpha,۲\beta) \end{cases} \Rightarrow |OO'|=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}$$

چون دو دایره مماس داخل‌اند، داریم: $|OO'|=R-R'$ بنابراین:

$$|OO'|=R-R'=۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}-R' \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}=۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}-R' \Rightarrow R'=۱$$

۸۰. معادله‌ی خط راستی که نقاط تقاطع دوایر $\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲=۱$ و $\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲=۱$ را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $x=۰$

۲) $y=۰$

۳) $x=y$

۴) $x=-y$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲-۱-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲-y^۲+۱=۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{۴}-۱-\left(-x+\frac{۱}{۴}\right)+۱=۰ \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

۸۱. معادله‌ی بیضی ای که مرکز آن $C(-۲,۳)$ محور کانونی آن موازی محور xها، طول قطر بزرگ آن ۱۰ و فاصله‌ی کانونی آن ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$

۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$

۳) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$

۴) $\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{matrix} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲c=۸ \Rightarrow \ =۴ \end{matrix} \Rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}=۳$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$$

بیضی افقی است

۸۲. نقطه‌ی $M(x,y)$ روی بیضی به معادله‌ی $9y^2+4x^2-8x=8$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون این بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر $2a$ است.

$$9y^2+4x^2-8x=8 \Rightarrow 9y^2+4\left(x^2-2x+1\right)-4=8 \Rightarrow 9y^2+4(x-1)^2=12$$

$$\Rightarrow \frac{9y^2}{12}+\frac{(x-1)^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{12}{9}}=\frac{(x-1)^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3} \Rightarrow 2a=2\sqrt{3}$$

۸۳. خروج از مرکز بیضی $(2x+y)^2+(2x-y)^2=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : پرانتزها را به توان رسانده وساده می‌کنیم.

$$(x+2y)^2+(x-2y)^2=2$$

$$2x^2+8y^2+4xy-4xy=2 \Rightarrow x^2+4y^2=1 \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸۴. تمام دایره‌های به مرکز $M(x,y)$ واقع بر سهمی $3y=x^2-2x-2$ گذرنده بر کانون آن بر کدام خط ثابت همواره مماس‌اند؟

۱) $y=\frac{5}{4}$ ۲) $y=\frac{3}{4}$ ۳) $y=-\frac{1}{4}$ ۴) $y=-\frac{7}{4}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : طبق تعریف سهمی، هر نقطه روی سهمی از یک نقطه به نام کانون و از یک خط به نام هادی به یک فاصله است. پس اگر به مرکز هر نقطه روی سهمی دایره‌ای به شعاع فاصله‌اش تاکنون رسم کنیم، این دایره بر خط هادی سهمی مماس است.

$$3y=x^2-2x-2 \Rightarrow x^2-2x-3y-2=0 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$y'_x=2x-2=0 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=1} 1-2-3y-2=0 \Rightarrow y=-1$$

لذا مختصات رأس $(1,-1)$ می‌باشد و چون سهمی قائم است. معادله‌ی خط هادی به صورت $y=\beta-a$ است پس داریم:

$$y=-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$$

۸۵. معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله $y=ax^{۲}+۲ax+a$ کدام است؟

۱) $y=-\frac{۱}{۲a}$ ۲) $y=-\frac{۱}{۴a}$ ۳) $y=-\frac{۱}{a}$ ۴) $y=-\frac{۱}{۳a}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : $y=ax^{۲}+۲ax+a$

$$y=a\left(x^{۲}+۲x+۱\right) \Rightarrow y=a(x+۱)^{۲} \Rightarrow (x+۱)^{۲}=\frac{۱}{a}(y)$$

لذا $S=(-۱,۰)$ و $a'=\frac{۱}{۴a}$ پارامتر سهمی است و چون سهمی قائم است، لذا معادله‌ی خط هادی به فرم $y=\beta-a'$ می‌باشد، پس :

$$y=۰-\frac{۱}{۴a} \Rightarrow y=\frac{-۱}{۴a}$$

معادله‌ی خط هادی سهمی

(در این جا پارامتر سهمی را a' گرفتیم تا با a در صورت تست اشتباه نشود).

۸۶. معادله‌ی خط هادی سهمی $y^{۲}-۲y-x=۰$ کدام است؟

۱) $x=-\frac{۳}{۴}$ ۲) $x=\frac{۳}{۴}$ ۳) $x=\frac{۵}{۴}$ ۴) $x=-\frac{۵}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$y^{۲}-۲y-x=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴} \ , \ y^{۲}-۲y=x \Rightarrow (y-۱)^{۲}=x+۱ \Rightarrow S=(-۱,۱)$$

سهمی افقی است. لذا داریم:

$$x=\alpha-a=-۱-\frac{۱}{۴}=-\frac{۵}{۴}$$

معادله خط هادی

۸۷. از نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ دو مماس عمود بر هم بر سهمی $y^{۲}-۴x=۰$ رسم شده است. α کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$y^{۲}=۴x \Rightarrow \begin{cases} O(۰,۰) & \text{رأس سهمی} \\ a=۱ & \text{پارامتر سهمی} \end{cases}$$

سهمی افقی است $\longrightarrow$ خط هادی $x=-۱$

می‌دانیم که از هر نقطه روی خط هادی سهمی می‌توان دو مماس عمود بر آن سهمی رسم کرد، پس باید $\alpha=-۱$ باشد.

۸۸. فاصله‌ی کانون‌های هذلولی $9x^2-4y^2=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{13}}{6}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$9x^2-4y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

هذلوبی افقی است و $a^2=\frac{1}{9}$ و $b^2=\frac{1}{4}$ ، پس:

$$c=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow FF'=2c=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

۸۹. معادله‌ی هذلولی‌ای که مرکز آن به مختصات $(-1,0)$ و محور کانونی آن موازی محور yها و در آن $a=2$ و $b=3$ باشد، کدام است؟

۱) $4y^2-9x^2-8y=40$ ۲) $9y^2-4x^2-8x=40$

۳) $9x^2-4y^2-8x=40$ ۴) $4x^2+9y^2-8x=40$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

هذلولی قائم است.

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1 \Rightarrow 9y^2-4x^2-8x=40$$

۹۰. مختصات محل برخوردمجانب‌های هذلولی به معادله‌ی $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$ کدام است؟

۱) $(2,-2)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(1,2)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

مختصات محل برخورد مجانب‌های هذلولی مرکز هذلوبی است، یعنی $O'=(2,-2)$

۹۱. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های هذلولی $x^۲-y^۲-۲y-۴x=۰$ کدام است؟

۱) $(۲,-۱)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها مرکز هذلولی. در نتیجه از مشتق‌های جزیی برای تعیین مختصات مرکز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} F'_{(x)}=۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \\ F'_{(y)}=-۲y-۲=۰ \Rightarrow y=-۱ \end{cases} \Rightarrow O'=(۲,-۱)$$

۹۲. فاصله‌ی یک کانون از مجانب هذلولی $x^۲-۳y^۲=۱۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : نکته : در هر هذلولی فاصله‌ی کانون تا مجانب برابر b است، پس :

$$\frac{x^۲}{۱۲}-\frac{y^۲}{۴}=۱ \Rightarrow b^۲=۴ \Rightarrow b=۲$$

۹۳. فاصله‌ی کانون هذلولی $\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ از مجانب این منحنی، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول :

$\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow$ مرکز هذلولی، هذلولی افقی است

$$\omega(۱,۰)\ ,\ \begin{cases} a^۲=۹ \\ b^۲=۱۶ \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۵$$

$F(۱+۵.۰)=(۶,۰)$: یکی از کانون‌ها $\Rightarrow F,F'(x_\omega \pm c, y_\omega) \Rightarrow$ هذلولی افقی است.

$\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow$ مجانب‌ها

$\frac{(x-۱)^۲}{۹}=\frac{y^۲}{۱۶} \Rightarrow \frac{(x-۱)}{۳}=\frac{\pm y}{۴} \Rightarrow$ یکی از مجانب‌ها $۴x+۳y-۴=۰$

فاصله‌ی نقطه‌ی $F(۶,۰)$ را از خط $۴x+۳y-۴=۰$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۴\times۶+۳\times۰-۴|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

راه حل دوم : در هر هذلولی، فاصله‌ی هر کانون از هر مجانب برابر bاست.

$$b^۲=۱۶ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow d=b=۴$$

$$x^۲+y^۲-۲xy-x=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۱)=۰$$

۹۴. اگر A و B دو ماتریس و ماتریس $A^T.B^T=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$A^tB^t=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن BA از طرفین رابطه‌ی فوق، ترانهاده می‌گیریم.

$$\left(A^tB^t\right)^t=\left(\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\right)^t$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

۹۵. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $(-۱,۲)$ با ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $(۳,۰)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(۰,-۳)$ ۴) $(۰,۳)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱-۲\\ -۲+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۰\end{bmatrix}$$

۹۶. مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $a+b+c$ ۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$|A|=\begin{vmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}$$

سطر سوم را با سطر دوم جمع می‌کنیم و سپس فاکتورگیری می‌کنیم.

$$=\begin{vmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ a & b & c\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix}=۳(a+b+c)\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ a & b & c\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}$$

چون دو سطر دترمینان برابر است حاصل آن صفر می‌شود.

۹۷. به ازای کدام مقادیر a و b ، اگر ۲ واحد به درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر اضافه شود، آنگاه ۳ واحد به مقدار دترمینان آن افزوده می‌شود؟

$$\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$$

۱) a هر چه باشد، $b=-\frac{1}{2}$

۲) a هر چه باشد، $b=\frac{1}{2}$

۳) b هر چه باشد، $a=-\frac{1}{2}$

۴) b هر چه باشد، $a=\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ به درایه‌ی a_{ij} به اندازه‌ی k واحد اضافه شود، آنگاه به دترمینان آن، k برابر همسازه‌ی آن (یعنی kA_{ij}) اضافه می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c+2 \\ a & b & c+1 \end{vmatrix}=|A|+3 \Rightarrow |A|+2A_{23}=|A|+3$$

$$\Rightarrow 2A_{23}=3 \Rightarrow 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix}=3 \Rightarrow -2(ab+3b-ab)=3 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

پس a هر مقداری می‌تواند باشد و $b=-\frac{1}{2}$.

۹۸. حاصل $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱)صفر

۲) $2a_1a_2a_3a_4a_5$

۳) $-2a_1a_2a_3a_4a_5$

۴) $-a_1a_2a_3a_4a_5$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}=(-)(-)\begin{vmatrix} a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5$$

جای سطر اول و پنجم و همچنین جای سطر دوم و چهارم را عوض می‌کنیم.

بنابراین حاصل جمع دو دترمینان مساوی $2a_1a_2a_3a_4a_5$ می‌باشد.

۹۹. حاصل $\begin{vmatrix} b-c & ۰ & ۰ \\ c & c-a & ۰ \\ b & a & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & ۰ & ۰ \\ c & b-c & ۰ \\ b & a & b-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & ۰ & ۰ \\ c & b-c & ۰ \\ b & a & c-a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$

۲) ۰

۳) $\frac{(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳}{۳}$

۴) $a^۳+b^۳+c^۳$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : هرسه دترمینان پائین مثلثی می‌باشند و حاصل هر کدام برابر است با حاصل ضرب اعداد قطر اصلی .

$$=(b-c)(c-a)(a-b)+(a-c)(b-c)(b-a)+(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=yzx+(-z)(y)(-x)+xyz=۳xyz$$

اگر $a-b=x$ و $b-c=y$ و $c-a=z$ فرض کنیم، داریم:

اما چون $x+y+z=۰$ می‌باشد، بنابراین $x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$

پس جواب : $۳xyz=(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$ و گزینه‌ی ۱ درست است.

۱۰۰. اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$ دترمینان A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$

۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) ۱

۴) ۳۳

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : طبق نکات ماتریس وارون داریم:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|} \Rightarrow |A|=\frac{۱}{|A^{-۱}|}$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-۱}|=۱۲+۲۱=۳۳ \Rightarrow |A|=\frac{۱}{۳۳}$$

۱۰۱. اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & m & ۳ \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، m کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) $۲,-۳$

۴) $-۲,۳$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & m & ۳ \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & m \end{vmatrix}\right)^{-۱} \quad (*)$$

برای محاسبه دترمینان ۳×۳ ، دو برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم:

$$\begin{vmatrix} ۲+۲(-۱) & ۰ & -۱ \\ ۱+۲(۰) & ۱ & ۰ \\ -۲+۲(۳) & m & ۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & m & ۳ \end{vmatrix}=(-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & m \end{vmatrix}=۴-m$$

$$\xrightarrow{(\cdot)} (۴-m)=\frac{۱}{m-۲} \Rightarrow (۴-m)(m-۲)=۱ \Rightarrow -(m-۳)^۲=۰ \Rightarrow m=۳$$

۱۰۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، معکوس ماتریس I-A به صورت $\left[\begin{array}{c|cc} ۱ & & \\ & B & \\ ۰ & & \\ \hline ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$ است. ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

روش اول :

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۴ \\ ۰ & ۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-۱}=\frac{۱}{|I-A|}(I-A)^{*}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

روش دوم :

به طورکلی، اگر $A_{n\times n}$ ماتریسی مثلثی بوده که درایه‌های قطر اصلی آن صفر باشد آن‌گاه همواره $A^{n}=O$: بنابراین داریم:

$$A^{۳}=O \Rightarrow I-A^{۳}=I \Rightarrow (I-A)\left(I+A+A^{۲}\right)=I \Rightarrow (I-A)^{-۱}=I+A+A^{۲}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

۱۰۳. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، m کدام است؟

۱) $-۲ , -۱$ ۲) $-۲ , ۱$ ۳) $۲ , -۱$ ۴) $۲ , ۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط نداشتن جواب}} \begin{vmatrix} ۲ & m \\ m-۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۲-m^{۲}+m=۰$$

$$m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۱ \end{cases}$$

۱۰۴. به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات خطی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۸ & ۷ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ a \end{bmatrix}$ ، جواب منحصر به فرد دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\begin{matrix} (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{matrix} \begin{cases} ۴x+۳y=-۱ \\ ۸x+۷y=۳ \\ -۵x+۴y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{باید جواب ۱و۲و۳ صدق کند}} \begin{matrix} ۲ \\ -۳ \end{matrix} \begin{cases} ۴x+۳y=-۱ \\ ۸x+۷y=۳ \end{cases}$$

$$۴x=-۱۶ \rightarrow x=-۴ \rightarrow y=۵$$

در رابطه (۳) $\rightarrow (-۵)\times(-۴)+۴\times۵=a \rightarrow a=۴۰$

۱۰۵. در روش گاس ـ جردن ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ & ۵ & -۳ \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$ درآمده است، $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ & ۵ & -۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۲-۲R_۱ \\ R_۳+R_۱ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۰ & -۳ & ۹ & -۱۲ \\ ۰ & ۶ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \frac{R_۲}{-۳} \\ \frac{R_۳}{۲} \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰۳ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۱-۲R_۲ \\ R_۳-۳R_۲ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_۳}{۱۰}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۱-۳R_۳ \\ R_۲+۳R_۳ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \\ c=-۱ \end{cases} \Rightarrow a+b+c=۲$$

۱۰۶. ماتریس $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۷ \\ ۱ & -۱ & -۲ & -۷ \end{array}\right]$ ، ماتریس ضرایب با ستون مقادیر ثابت یک دستگاه سه معادله، سه مجهول است که در روش حذفی گاوس به صورت $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۰ & c & d \end{array}\right]$ درآمده است، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۳۰-　　۲) ۲۵-　　۳) ۳۰　　۴) ۲۵

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{array}{c} R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۷ \\ ۱ & -۱ & -۲ & -۷ \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ -۲R_۱+R_۲ \\ -R_۱+R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۳ & ۷ \\ ۰ & -۲ & -۱ & -۷ \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -۲R_۲+R_۳ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۰ & -۷ & -۲۱ \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۱ \\ c=-۷ \\ d=-۲۱ \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=-۳۰$$

۱۰۷. مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۳x_۱-۳x_۲-۴x_۳=۰ \\ ۲x_۱-x_۲-۲x_۳=۰ \end{cases}$ در کدام یک از معادله‌های زیر صدق می‌کند؟

۱) $۳x_۱+۲x_۲-۵x_۳=۰$　　۲) $x_۱-۴x_۲+۵x_۳=۰$

۳) $۲x_۱+۳x_۲+۶x_۳=۰$　　۴) $۵x_۱-۷x_۲-۸x_۳=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

فصل مشترک دو صفحه‌ی دستگاه داده شده، خطی است موازی با بردار هادی $\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۳ & -۴ \\ ۲ & -۱ & -۲ \end{vmatrix}=۲i-۲j+۳k$ و معادله‌ی خط آن به صورت $x_۱=۲t\ ,\ x_۲=-۲t\ ,\ x_۳=۳t$ است که در بین گزینه‌های داده شده تنها در معادله‌ی $۵x_۱-۷x_۲-۸x_۳=۰$ صدق می‌کند.

۱۰۸. دو زاویه A وb متمم اند.اندازه زاویه A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه ی مکمل زاویه ی B است.زاویه A چند درجه است؟

۱)۲۷　　۲)۳۶　　۳)۶۳　　۴)۷۲

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : طبق فرض سؤال AوB دو زاویه ی متمم اند.پس:

$$\widehat{A}+\widehat{B}=90$$

همچنین طبق فرض سؤال،اندازه زاویه A ،$\frac{4}{9}$ مکمل زاویه B است.پس:

$$\widehat{A}=\frac{4}{9}\left(180^\circ-\hat{B}\right) \Rightarrow 9\hat{A}=4\left(180^\circ-\hat{B}\right)$$

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ \\ 9\widehat{A}+4\widehat{B}=720^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{A}=72^\circ \quad ,\hat{B}=18^\circ$$

۱۰۹. زاویه های مثلثی متناسب با اعداد 2,5,8 است.اندازه ی کوچکترین زاویه ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

زوایای این مثلث را $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ در نظر می گیریم،چون این زوایا طبق فرض سؤال با اعداد 2,5,8 متناسب اند.پس $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}$ با فرض اینکه $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}=K$ ،$\begin{cases}\hat{A}=8k\\ \hat{B}=5k\\ \hat{C}=2k\end{cases}$ همچنین می دانیم که مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 8K+5K+2K=180^\circ$$

$$\Rightarrow 15K=180^\circ \Rightarrow K=12^\circ$$

کوچکترین زاویه ی خارجی،متناظر با بزرگترین زاویه ی داخلی است و داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=8K=96^\circ \ (\text{بزرگترین زاویه داخلی})\\ \hat{B}=5K=60^\circ\\ \hat{C}=2K=24^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{کوچکترین زاویه خارجی}=180^\circ-96^\circ=84^\circ$$

۱۱۰. مثلثی به اضلاع $b,a,3$ با مثلثی به طول اضلاع 5,4,3 متشابه است.دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) 7/2 ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) 13/5

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : در دو مثلث متشابه،اضلاع دو به دو متناسبند.با توجه به این که دو مثلث قابل انطباق نیستند،ضلع با اندازه ۳ در مثلث اولی با ضلع به اندازه ی ۳ در مثلث دوم متناسب نیست.در نتیجه دو حالت داریم:

$$\begin{cases}\frac{3}{4}=\frac{a}{3}=\frac{b}{5}\Rightarrow a=\frac{9}{4},b=\frac{15}{4}\Rightarrow \text{محیط}=3+\frac{9}{4}+\frac{15}{4}=9\\ \frac{3}{5}=\frac{a}{3}=\frac{b}{4}\Rightarrow a=\frac{9}{5},b=\frac{12}{5}\Rightarrow \text{محیط}=3+\frac{9}{5}+\frac{12}{5}=\frac{36}{5}\end{cases}$$

بنابراین بیشترین محیط برابر ۹ است.دقت کنید که در هر حالت جای a و b می تواند عوض شود که تأثیری در محیط مثلث ندارد.

۱۱۱. اضلاع مکعب مستطیلی با اعداد ۱و۲و۲ متناسب اند.اگر حجم مکعب مستطیل ۸ باشد،طول قطر آن چقدر است؟

۱) $4\sqrt[3]{2}$ ۲) $9\sqrt[3]{2}$ ۳) $3\sqrt[3]{2}$ ۴) $9\sqrt[3]{4}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اضلاع مکعب مستطیل را a وb وc در نظر می گیریم.طبق فرض $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{1}$، پس اگر در نظر بگیریم $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{1}=k$ ،داریم:

$$a=2k\ ,b=2k\ ,c=k$$

حجم مکعب مستطیل $V=abc\rightarrow 8=(2k)(2k)(2k)$:

$$\Rightarrow 8k^3\Rightarrow k^3=2\Rightarrow k=\sqrt[3]{2}$$

از طرفی $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{k^2+k^2+k^2}=\sqrt{9k^2}=3k=3\sqrt[3]{2}$:

۱۱۲. کره ای در مکعبی به یال a محاط شده،حجم کره چقدر است؟

۱) $\frac{4\pi a^3}{3}$ ۲) $\frac{\pi a^3}{8}$ ۳) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۴) $\frac{32\pi a^3}{8}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر کره ای درون یک مکعب محاط شود،طول قطر کره،برابر با طول یال مکعب است،پس:

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \frac{a}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{8}$$

۱۱۳. بزرگترین مکعب ممکن داخل یک کره به قطر ۶ واحد جای گرفته است،سطح کل این مکعب کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : می دانیم اگر بزرگترین مکعب ممکن در داخل یک کره قرار بگیرد (مکعب در کره محاط باشد)،آنگاه طول قطر کره،با طول قطر مکعب برابر است. همچنین،می دانیم که طول قطر مکعبی به طول یال a برابر با $\sqrt{3}a$ است.

با توجه به توضیحات بالا اگر طول یال مکعب مورد نظر را a در نظر بگیریم از آنجا که طول قطر کره ی محیط بر آن برابر ۶ است،داریم:

$$\sqrt{3}a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

از طرفی می دانیم که سطح کل مکعبی به طول یال a برابر با $6a^2$ است،داریم:

سطح کل مکعب $: 6a^2 \rightarrow 6\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = 6\left(\frac{36}{3}\right) = 72$

۱۱۴. هر زاویه یک ۱۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟

۱) $150°$ ۲) $155°$ ۳) $160°$ ۴) $165°$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

هر زاویه n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

$$a = 18 \Rightarrow \frac{(n-2)\times 180°}{n} = \frac{(18-2)\times 180°}{18} = 160°$$

۱۱۵. تعداد قطرهای یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ واحد بیشتر است،تعداد قطرهای این چند ضلعی کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر با $\frac{n(n-3)}{2}$ است،پس طبق فرض مسأله داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 42 \Rightarrow n(n-3) = 2(n+42)$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n = 2n + 84 \Rightarrow n^2 - 5n - 84 = 0$$

$$\Rightarrow (n-12)(n+7) = 0$$

$$\begin{cases} n = 12 \Rightarrow \text{تعداد قطرها} = \frac{12\times(12-3)}{2} = 54 \\ n = -7 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۱۱۶. عدد مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ چند برابر عدد ارتفاع آن است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{2}a \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

۱۱۷. سه پاره خط به طول های $4x - 4$ و $x + 7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند،مقدار x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ ۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ ۳) $2 < x < 3$ ۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

شرط وجود مثلث را اجرا می کنیم و از آن جا که این شرط باید به صورت هم زمان برقرار باشند،پس باید اشتراک بگیریم.

$$(1)\ \ 4x - 4 < (x + 7) + 6x \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$

$$(2)\ \ x + 7 < (4x - 4) + 6x \Rightarrow 9x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{9}$$

$$(3)\ \ 6x < (4x - 4) + (x + 7) \Rightarrow x < 3$$

از اشتراک (1) و (2) و(3) نتیجه می گیریم که: $\frac{11}{9} < x < 3$

۱۱۸. اگر مقدار مساحت مثلث سرپینسکی در مرحله صفر ام برابر ۱۶ باشد،تفاضل مقدار مساحت باقی مانده ی مثلث سرپینسکی در مرحله چهارم از مرحله سوم چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{27}{16}$ ۴) $\frac{81}{64}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مساحت مثلث در مرحله صفر ام $S_0 = 16$

$$S_3 - S_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 S_0 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 S_0 = \frac{27}{64} \times 16 - \frac{81}{256} \times 16 = \frac{27}{4} - \frac{81}{16} = \frac{27}{16}$$

۱۱۹. در مثلثی $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ ،با فرض $b = a\sqrt{3}$ چند مثلث می توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نشدنی

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

هر وقت در مثلثی دو ضلع و سینوس زاویه ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم باشند،سینوس زاویه ی مقابل به ضلع دیگر نیز از قضیه سینوس ها به دست می آید:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \rightarrow \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{3}{2} = \frac{1}{5} > 1 \Rightarrow$$

که این مقدار غیر قابل قبول است،پس مثلثی وجود ندارد.

۱۲۰. وقتی محیط یک دایره از ۲۰ سانتی متر به ۳۰ سانتی متر افزایش می یابد،افزایش شعاع آن بر حسب سانتی چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2\pi}$ ۲) $2/5$ ۳) $\frac{5}{\pi}$ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

شعاع ددایره را در وضعیت اول R_1 و در وضعیت دوم R_2 در نظر می گیریم.داریم:

$$2\pi R_1 = 20 \Rightarrow R_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$2\pi R_2 = 30 \Rightarrow R_2 = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$$

$$\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{15}{\pi} - \frac{10}{\pi} = \frac{5}{\pi}$$

۱۲۱. مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه نقطه ی غیر واقع بر یک امتداد به یک فاصله اندکدام است؟

۱)یک نقطه ۲)یک خط ۳)دو خط ۴)یک صفحه

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

برای تبدیل مسأله ی بالا به یک سوال آشنا،با حفظ شرایط سوال،می توانیم سه نقطه ی غیر واقع بر یک امتداد (غیر واقع بر یک استقامت) را سه رأس یک مثلث فرض کنیم.و این گونه تفسیر کنیم که مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه رأس یک مثث به یک فاصله اند،فصل مشترک سه صفحه ی عمود منصف اضلاع مثلث است.این فصل مشترک در واقع یک خط است که در محل هم رسی عمود منصف های مثلث بر صفحه ی مثلث عمود می شود.

۱۲۲. اگر فاصله ی خط $y = ax + b$ تا مبدأ مختصات k باشد،فاصله ی تبدیل یافته ی خط فوق تحت تبدیل $T(x, y) = (ax + b, ay + b)$ تا مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{k+b}{\sqrt{a}}$ ۲) k ۳) $k + b$ ۴) $\frac{k}{\sqrt{a}}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} ax + b = \acute{x} \Rightarrow x = \dfrac{\acute{x} - b}{a} \\ ay + b = \acute{y} \Rightarrow y = \dfrac{\acute{y} - b}{a} \end{cases} \rightarrow \frac{\acute{y} - b}{a} = \left(\frac{\acute{x} - b}{a}\right) a + b \rightarrow \acute{y} = a\acute{x} + b$$

معادله ی تصویر با خط اولیه یکسان است پس فاصله ی آن تا مبدأ نیز برابر k است.

۱۲۳. تبدیل یافته ی نقطه ی $A(5,6)$ تحت ترکیب سه انتقال به ترتیب با بردارهای $\vec{a} = (1, -4)$ و $\vec{b} = (2,3)$ و $\vec{c} = (-3,1)$ کدام است؟

۱) $(11,14)$ ۲) $(6,2)$ ۳) $(2,7)$ ۴) $(5,6)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

بردار انتقال این سه انتقال عبارت است از جمع تک تک بردارهای انتقال.

$$\vec{V} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \big(1 + 2 + (-3)\big), (-4) + 3 + 1 = (0,0)$$

$$\Rightarrow T(x, y) = (x + 0, y + 0) \Rightarrow T(5,6) = (5,6)$$

۱۲۴. خط $y-2x+1=0$ را تحت بردار $\vec{T}$ انتقال داده ایم و معادله ی آن تغییر نکرده است.بردار $\vec{T}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(-2,1)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر بردار انتقال،موازی خط مفروض باشد،خط تبدیل یافته با خط اولیه یکسان است.در بین گزینه ها فقط شیب بردار $(1,2)$ برابر شیب خط اولیه یعنی عدد ۲ است.

۱۲۵. با کدام بردار انتقال می توان دو خط $d: 2x-y+1=0$ و $\acute{d}: x+y-1=0$ را بر هم نگاشت؟

۱) $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ۲) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ۴)هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : هیچ انتقالی نمی تواند دو خط متقاطع را بر هم بنگارد.زیرا انتقال شیب خط را حفظ می کند.

۱۲۶. خط $d: y+x=1$ را انتقال داده ایم و معادله ی آن به صورت $\acute{d}: y+x=3$ درآمده است.کدام گزینه نمی تواند به عنوان بردار انتقال این دو خط انتخاب شود؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(4,-2)$ ۴)$(3,0)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$T(x,y)=(x+a,y+b) \Rightarrow \begin{cases} x+a=\acute{x} \Rightarrow x=\acute{x}-a \\ y+b=\acute{y} \Rightarrow y=\acute{y}-b \end{cases}$$

جایگذاری در معادله خط قدیم $\rightarrow d: \acute{y}-b+\acute{x}-a=1 \Rightarrow \acute{y}+\acute{x}=1+a+b$

مقایسه با خط قدیم(1) $\rightarrow 1+a+b=3 \Rightarrow a+b=2$

با جایگذاری گزینه های ۱و۲و۳و۴ در رابطه ی (۱) می بینیم که گزینه ی ۴ در رابطه ی مزبور صدق نمی کند.

۱۲۷. اگر دو نقطه ی $A=(a+1,b-1)$ و $B=(2a+3,b+2)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط $y=x$ باشند،آن گاه مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱)۱۱ ۲)۱ ۳)-11 ۴)-1

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

در بازتاب نسبت به خط $y=x$، طول و عرض نقطه جا به جا میشوند:

$$T(x,y)=(x,y)$$
$$T(A)=B \Rightarrow T(a+1,b-1)=(b+2,2a+3) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+1=b+2 \\ b-1=2a+3 \end{cases} \Rightarrow a=-5 \quad , \quad b=-6 \quad \Rightarrow a+b=-11$$

۱۲۸. بازتاب خط $y=2x-1$ نسبت به خط $y=-x$ کدام است؟

۱) $x=2y-1$ ۲) $-x=2y-1$ ۳) $x=2y+1$ ۴) $y=2x-1$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$T(x,y)=(-y,-x) \Rightarrow \begin{cases} -y=\acute{x} \Rightarrow y=-\acute{x} \\ -x=\acute{y} \Rightarrow x=-\acute{y} \end{cases}$$

جایگذاری در معادله خط قدیم $\rightarrow -\acute{x}=2(-\acute{y})-1 \Rightarrow \acute{x}=2\acute{y}+1$

۱۲۹. اگر بازتاب خط $3x+2y=a$ نسبت به خط $y=-x$ از نقطه ی $(1,-1)$ عبور کند، آن گاه a کدام است؟

۱)صفر ۲)۱ ۳)۱- ۴)۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$T(x,y)=(-y,-x)\Rightarrow\begin{cases}-y=x' & \Rightarrow y=-\acute{x}\\ -x=\acute{y} & \Rightarrow x=-\acute{y}\end{cases}$$

جایگذاری در معادله ی قدیم $\rightarrow\ 3(-\acute{y})+2(-\acute{x})=a\ \rightarrow -3\acute{y}-2\acute{x}=a$

جایگذاری نقطه $\rightarrow\ -3\times(-1)-2\times 1=a\ \Rightarrow a=1$

۱۳۰. نقطه ی $M=(2,0)$ را حول مبدأ مختصات به اندازه ی $\frac{\pi}{3}$ دوران می دهیم. مختصات نقطه ی تبدیل یافته چیست؟

۱) $\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$R_\theta.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\acute{x}\\ \acute{y}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$